5. Hydrostatik und die Eigenschaften des Drucks

Rainer Hauser

Oktober 2010

1 Einleitung

1.1 Makroskopische Eigenschaften der Materie

Festkörper, Flüssigkeiten und Gase haben folgende makroskopischen Eigenschaften:

- Festkörper haben, wie der Name sagt, eine feste *Form*, während Flüssigkeiten und Gase leicht verformt werden können. Feste Körper haben eine gewisse Steifheit und Härte, Flüssigkeiten sammeln sich allein durch die Gewichtskraft am Gefässboden, und Gase füllen ein Gefäss vollständig aus.
- Festkörper und Flüssigkeiten haben ein festes *Volumen* und lassen sich kaum zusammenpressen, während Gase leicht komprimiert werden können.
- Die *Dichte* definiert als Masse pro Volumen ist sowohl bei festen Körpern als auch bei Flüssigkeiten gross, während sie bei Gasen klein ist. Sie ist bei Gasen zudem variabel, weil diese sich komprimieren lassen, bei festen und flüssigen Stoffen aber im Wesentlichen konstant.

1.2 Mikroskopische Eigenschaften der Materie

Festkörper, Flüssigkeiten und Gase haben folgende mikroskopischen Eigenschaften:

- Die *Form* hängt von den Bindungskräften zwischen den Molekülen ab. Sind diese wie bei festen Körpern gross, lassen sich die Moleküke nur mit Gewalt gegeneinander verschieben, wobei der Körper zerbricht. Bei Flüssigkeiten hingegen haften die Moleküle zwar aneinander, lassen sich aber gegeneinander verschieben, während sie sich bei Gasen praktisch völlig frei bewegen können.
- Ob das *Volumen* fest oder variabel ist, hängt vom freien Raum zwischen den Molekülen ab. Bei festen und flüssigen Körpern sind die Moleküle nahe beieinander, während sie bei Gasen weit voneinander entfernt sind, sodass sie zusammengepresst werden können.
- Die *Dichte* ist einerseits durch die Masse des einzelnen Moleküls und andererseits durch die Anzahl Moleküle pro Volumeneinheit bestimmt.

2 Beziehung zwischen Kraft und Druck

2.1 Druckverteilung bei festen Körpern

Wer schon einmal auf dem Rücken auf einer weichen Matratze und auf einem harten Felsen lag, kennt den Unterschied, den die Auflagefläche und die Kraftverteilung darauf ausmachen. Bei der Matratze verteilt sich das Gewicht gleichmässiger, während man beim Felsen harte Stellen und spitze Steinchen spürt.

Definition:
Der *Druck* ist definiert als Kraft pro Fläche

$$p = \frac{F}{A} \tag{1}$$

und hat die Einheit *Pascal* mit $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. (Daneben gibt es noch die Einheit $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$ sowie die in der Meteorologie gebräuchlichen Einheiten $1\,\mathrm{hPa} = 100\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{mbar} = 10^{-3}\,\mathrm{bar}$.)

2.2 Druckverteilung bei Flüssigkeiten und Gasen

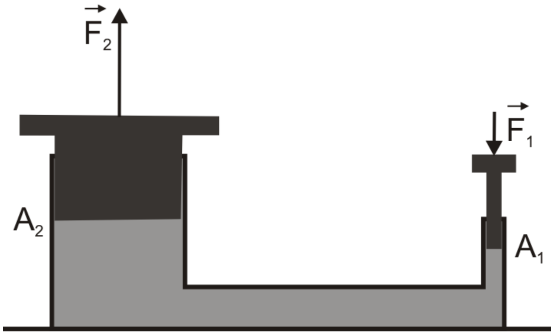
Drückt man auf einen Teller auf dem Tisch, gibt dieser den Druck an den Tisch weiter. Drückt man hingegen mit dem Finger auf Kaffee in einer Tasse, so weicht er einfach aus. Festkörper und Flüssigkeiten verhalten sich bei Druck also verschieden. Ist eine Flüssigkeit eingeschlossen, kann sie dem Druck nicht einfach ausweichen, sondern gibt ihn an die Begrenzungsfläche weiter.

Das *Prinzip von Pascal* besagt, dass eine Flüssigkeit oder ein Gas, das eingeschlossen ist und auf das an irgendeiner Stelle Druck ausgeübt wird, diesen gleichmässig verteilt. Die Flüssigkeit oder das Gas übt auf die Begrenzungsfläche A die Kraft $F = p \cdot A$ aus.

2.3 Hydraulik und Pneumatik

Mit dem Prinzip von Pascal lässt sich Kraft übertragen. Bei hydraulischen Systemen wird eine Flüssigkeit (meist ein Öl) dafür benutzt, und bei pneumatischen Systemen ein Gas (meist Luft), das unter Druck steht. Bremsen beim Auto sind hydraulisch, und man braucht dazu Bremsflüssigkeit. Bremsen bei der Eisenbahn sind pneumatisch, was man am Zischen der abgelassenen Druckluft erkennt.

Bei geeignetem Verhältnis der Flächen A_1 und A_2 erlaubt die hydraulische Hebebühne, mit einer kleinen Kraft $\vec{F_1}$ eine grosse Kraft $\vec{F_2}$ zu erzeugen und damit beispielsweise ein Auto in einer Autowerkstatt zu heben. Weil gemäss Prinzip von Pascal der Druck auf die Fläche A_1 gleich dem Druck auf die Fläche A_2 ist, folgt aus (1)



$$F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

für die Kraft F_2.

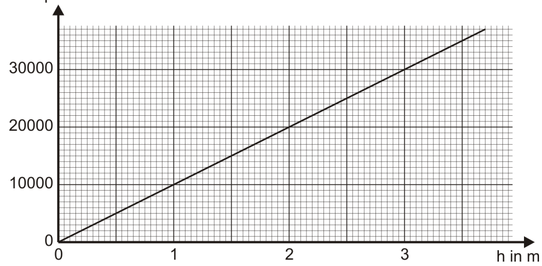
Die Hebebühne hat eine gewisse Verwandtschaft mit dem Hebelgesetz. Um die Fläche A_2 von der Höhe h auf die Höhe $h+d_2$ zu heben, muss man die Fläche A_1 um d_1 runterdrücken. Bei konstantem Volumen muss $A_1 \cdot d_1 = A_2 \cdot d_2$ gelten, woraus $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$ folgt. (Weil sich Flüssigkeiten fast nicht komprimieren lassen, bleibt bei hydraulischer Kraftübertragung das Volumen praktisch konstant. Weil bei der pneumatischen Kraftübertragung das Gas unter Druck steht und somit bereits stark komprimiert ist, verändert sich das Volumen auch dort nur unwesentlich.)

3 Schweredruck und Auftrieb

3.1 Gesamtdruck in Flüssigkeiten

Das Wasser in einem Bassin drückt auf das Wasser darunter, auf den Boden und auf die Person, die darin schwimmt. Die Gewichtskraft des Wassers führt so zum *Schweredruck*.

Die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ des Wassers, die auf eine Fläche A drückt, hat das Volumen $V = A \cdot h$ und die Masse $m = A \cdot h \cdot \rho$, wenn ρ die Dichte des Wassers ist. Der Druck ist somit



$$p = \rho \cdot g \cdot h \qquad (2)$$

weil sich die Fläche A herauskürzt.

Der Schweredruck einer Flüssigkeit hängt nicht von der Form des Gefässes ab, sondern nur von der Tiefe h. Diese Abhängigkeit ist linear. Der *Gesamtdruck* einer Flüssigkeit

$$p = p_a + \rho \cdot g \cdot h \qquad (3)$$

setzt sich aus einem allfälligen äusseren Druck p_a und dem Schweredruck der Flüssigkeit gemäss (2) zusammen. Normalerweise ist im Alltag der äussere Druck der Schweredruck der Luft, sodass sich der Gesamtdruck aus dem Luft- und dem Wasserdruck zusammensetzt. Der Luftdruck ist etwa 1 bar, und der Wasserdruck nimmt pro 10 m um ungefähr 1 bar zu.

Weil die Luft als Gas komprimierbar ist und die Dichte somit mit zunehmender Höhe schnell abnimmt, ist die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe h nicht wie bei Flüssigkeiten linear, sondern exponentiell. Aus der Erdoberfläche A, die sich aus dem Radius $r = 6370\,\mathrm{km}$ als $A = 4\pi r^2 \approx 5 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^2$ berechnen lässt, und aus dem Luftdruck auf Meereshöhe kann man die Gesamtmasse der Erdatmosphäre als

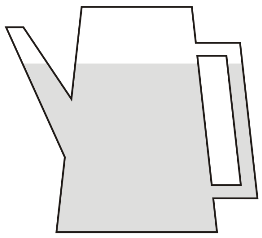
$$m = \frac{\rho \cdot A}{g} \approx 5 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}$$

bestimmen.

3.2 Druckgleichgewicht

Unter *kommunizierenden Gefässen* versteht man Gefässe, die so miteinander verbunden sind, dass sich eine Flüssigkeit zwischen ihnen bewegen kann.

Ein alltägliches Beispiel für solche kommunizierende Gefässe ist der Wasserkrug, in dem sich das Wasser im Wasserbehälter, im Ausgussrohr und im Henkel, die die kommunizierenden Gefässe darstellen, bewegen kann. Durch das Druckgleichgewicht steht das Wasser überall gleich hoch.



Das liegt daran, dass der Luftdruck als äusserer Druck p_a auf das Wasser im Wasserbehälter, im Ausgussrohr und im Henkel gleich ist und der Druck in der Verbindung zwischen kommunizierenden Gefässen nur durch die Wassertiefe und den Luftdruck bestimmt ist.

Man kann dies noch genauer quantitativ begründen, indem man den Druck an zwei verschiedenen Stellen im Wasserkrug bestimmt, der nur durch den Luftdruck p_a und die Wassertiefe h bestimmt ist. Wenn das Wasser sich nicht bewegt, sind die Kräfte im Gleichgewicht, es herrscht also ein *Druckgleichgewicht.* Weil $p_a + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = p_a + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$ wegen (3) an den beiden Stellen im Wasserkrug gilt, dabei die beiden Werte ρ_1 und ρ_2 für die Dichte der Flüssigkeit gleich sind, weil es sich ja um dieselbe Flüssigkeit handelt, müssen die Höhen h_1 und h_2 ebenfalls übereinstimmen.

Auch in anderen Systemen, die in Ruhe sind, bilden sich Druckgleichgewichte. Das Quecksilber-Barometer, bei dem eine Glasröhre, in der ein Vakuum herrscht, im Quecksilber steht, ist ein Beispiel. Das Quecksilber steigt wegen dem fehlenden Luftdruck, bis sein Gewicht in der Glasröhre und der Luftdruck aussen im Gleichgewicht sind, was je nach meteorologischen Bedingungen bei einer Säulenhöhe von etwa 760 mm erreicht ist.

3.3 Auftrieb und Gewicht

Ist ein zylindrischer Körper mit Boden- und Deckfläche A und Höhe h ganz in eine Flüssigkeit getaucht, sodass sich die Deckfläche in einer Tiefe t unter der Oberfläche befindet, dann herrschen folgende Druckverhältnisse. Auf die Deckfläche drücken Luft und Wasser mit $p_D = p_a + \rho_F \cdot g \cdot t$, sodass eine nach unten gerichtete Kraft $F_D = p_D \cdot A$ wirkt. Auf die Bodenfläche drücken Luft und Wasser mit $p_B = p_a + \rho_F \cdot g \cdot (t+h)$, sodass eine nach oben gerichtete Kraft $F_B = P_B \cdot A$ wirkt. Auf den Zylindermantel drücken gleich grosse Kräfte von allen Seiten und heben sich deshalb gegenseitig auf. Weil die Kraft auf die Deckfläche und die Kraft auf die Bodenfläche entgegengesetzt gerichtet sind, resultiert

$$F_A = \rho_F \cdot V \cdot g \tag{4}$$

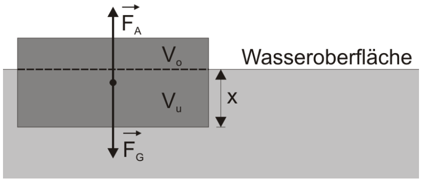
für die *Auftriebskraft* $F_A = F_B - F_D$.

Das *Prinzip von Archimedes* besagt, dass ein Körper mit Volumen V, der vollständig in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_F getaucht ist, eine Auftriebskraft F_A erfährt, die gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit, also $F_G = m_F \cdot g = \rho_F \cdot V \cdot g$ wie in (4), ist.

Auf einen vollständig im Wasser eingetauchten Körper wirkt einerseits die Gewichtskraft F_G des Körpers und andererseits die Auftriebskraft F_A. Die Gewichtskraft hängt vom der Dichte ρ_K des Körpers ab, während die Auftriebskraft von der Dichte ρ_F der umgebenden Flüssigkeit abhängt. Gilt $F_G > F_A$ beziehungsweise $\rho_K > \rho_F$, so sinkt der Körper. Gilt $F_G < F_A$ beziehungsweise $\rho_K < \rho_F$, so steigt der Körper. Gilt $F_G = F_A$ beziehungsweise $\rho_K = \rho_F$, so schwebt der Körper.

3.4 Schwimmende Körper

Ist die Gewichtskraft kleiner als der Auftrieb, dann steigt der Körper also, aber die Frage ist, wie weit er steigt. Hat er die Flüssigkeit vollständig verlassen, so wirkt nur noch die Gewichtskraft, ist er aber vollständig in der Flüssigkeit, so überwiegt die Auftriebskraft. Der Körper steigt also nur bis zu einer gewissen Höhe, sodass das Volumen V_o über und das Volumen V_u unter Wasser ist.



Die Gewichtskraft eines zylindrischen Körpers ist $F_G = \rho_K \cdot V \cdot g$ und der Luftdruck auf die Deckfläche ist $F_D = p_a \cdot A$. Sie drücken nach unten, während der Luft- und der Schweredruck auf die Bodenfläche, die zusammen $F_B = p_a \cdot A + \rho_F \cdot g \cdot x \cdot A$ betragen, nach oben drücken.

Mit $V_u = x \cdot A$ ist die Auftriebskraft $F_A = F_B - F_D = \rho_F \cdot V_u \cdot g$. Der Körper ist im Gleichgewicht, wenn $F_A = F_G$ ist, wenn also $\rho_K \cdot V = \rho_F \cdot V_u$ gilt. Daraus folgt

$$\frac{V_u}{V} = \frac{\rho_K}{\rho_F}$$

für das Verhältnis des Volumens V_u unter Wasser zum Gesamtvolumen V.