# Differenzial- und Integralrechnung III

Rainer Hauser

April 2012

# 1 Einleitung

## 1.1 Polynome und Potenzfunktionen

Die *Polynome* oder *Polynomfunktionen* lassen sich durch die endliche Anzahl von $n+1$ Parametern $a_i \in \mathbb{R}$ in der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ darstellen, wobei $a_n \neq 0$ angenommen ist. Die Zahl $n$ ist der Grad. Die konstanten Funktionen $f(x) = a_0$, die linearen Funktionen $f(x) = a_1 x + a_0$ und die quadratischen Funktionen $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ sind die einfachsten Polynomfunktionen.

Polynomfunktionen sind Linearkombinationen von speziellen Potenzfunktionen $f(x) = x^n$, für die $n$ eine nicht-negative ganze Zahl ist, und die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Für allgemeine *Potenzfunktionen* $x \mapsto x^p$ kann $p$ eine beliebige reelle Zahl sein, aber diese Funktionen sind nur für $x > 0$ definiert.

## 1.2 Ableitung

Viele reelle Funktionen, und dazu gehören alle Potenzfunktionen, lassen sich ableiten. Für die Ableitung der Funktion $f(x)$ schreibt man $f'(x)$ oder $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x)$. Die Ableitung der Potenzfunktionen ist einfach, denn es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}x^p = p \cdot x^{p-1}$ für alle $p \in \mathbb{R}$. Weil $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(a \cdot f(x)) = a \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(f(x)+g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}g(x)$ für beliebige reelle Zahlen $a$ und beliebige differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt, lassen sich sämtliche Polynomfunktionen ebenfalls leicht ableiten.

## 1.3 Umkehrung einer Operation

Gewisse Operationen kann man umkehren. Addiert man beispielsweise die Zahl drei zu einer beliebigen Zahl, kann man das wieder rückgängig machen, indem man drei subtrahiert, denn es gilt für sämtliche Zahlen $a$ und $b$, falls $a + 3 = b$ wahr ist, so ist auch $a = b - 3$ wahr.

Die Umkehrung einer Operation ist nicht immer eindeutig. Wenn man beispielsweise das Quadrieren einer Zahl rückgängig machen möchte, so weiss man nicht, ob man die positive oder die negative Zahl nehmen soll, denn es gilt $a^2 = (-a)^2$ für alle Zahlen $a$. Weil man also nicht weiss, ob 4 durch Quadrieren von 2 oder $-2$ entstanden ist, hat man festgelegt, dass die Wurzel als Umkehrung des Quadrierens immer die positive Zahl ist. Es gilt somit $\sqrt{4} = 2$. Das ist aber kein mathematisches Gesetz, sondern eine Abmachung.

# 2 Unbestimmtes Integral

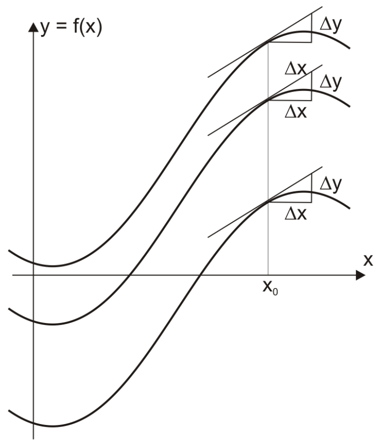
## 2.1 Stammfunktionen

Die Ableitung als Operation auf reellen Funktionen kann umgekehrt werden. Ist $f'(x) = 16x^3$, so könnte die Ausgangsfunktion, die zu dieser Ableitung geführt hat, $f(x) = 4x^4$ gewesen sein, aber $f(x) = 4x^4 + 11$ als Ausgangsfunktion hätte zur gleichen Ableitung geführt, denn es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(4x^4 + 11) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}4x^4 = 16x^3$. Eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist, nennt man eine *Stammfunktion* der Funktion $f(x)$. Die

Stammfunktionen von Potenzfunktionen lassen sich einfach bestimmen. Ist die Potenzfunktion $f(x) = x^p$ für $p \in \mathbb{R}$, dann ist

$$F(x) = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} \tag{1}$$

für $p \neq -1$ eine Stammfunktion von $f(x)$.




Weil die Ableitungen von zwei Funktionen, die sich nur um einen konstanten Summanden unterscheiden, gleich sind, ist mit $F(x)$ auch jede Funktion $F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen von drei Funktionen, die sich nur um eine Konstante unterscheiden, die also durch Verschiebung parallel zur $y$-Achse ineinander übergehen. Es ist offensichtlich, dass solche parallelen Verschiebungen die Steigung des Graphen für einen bestimmten $x$-Wert $x_0$ nicht verändern.

Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(a \cdot f(x)) = a \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(f(x)+g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} g(x)$ für beliebige reelle Zahlen $a$ und beliebige differenzierbare Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt auch für die Umkehrung der Ableitung, dass konstante Faktoren und Summen beim Bestimmen einer Stammfunktion kein Problem darstellen. Speziell können die einzelnen Glieder einer Polynomfunktion getrennt mit Hilfe von (1) behandelt werden.

Beispiel:
Ist $f(x) = 9x^2 + 4x + 5$ gegeben, dann ist $F(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x + c$.

## 2.2 Integrieren

Die Umkehrung der Ableitung – also das Auffinden einer Stammfunktion – nennt man *Integrieren.* Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so schreibt man

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = F(x) \qquad\qquad \int f(x)\,\mathrm{dx} = F(x) + c \tag{2}$$

und nennt die Grösse auf den linken Seiten der Gleichheitszeichen das *unbestimmte Integral.* Die zweite Variante zeigt an, dass das unbestimmte Integral nur bis auf eine Konstante $c$ bestimmt ist und eigentlich eine Menge von Funktionen darstellt. Diese Konstante nennt man *Integrationskonstante.*

Für das unbestimmte Integral gilt

$$\int (r \cdot f(x))\,\mathrm{dx} = r \int f(x)\,\mathrm{dx} \qquad\qquad \int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{dx} = \int f(x)\,\mathrm{dx} \pm \int g(x)\,\mathrm{dx} \tag{3}$$

für beliebige reelle Zahlen $r$ und Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Diese beiden Identitäten heissen *Faktorregel* beziehungsweise *Summen-* und *Differenzenregel.*

Beispiel:
Ist $f(x) = 9x^2 + 4x + 5$ gegeben, dann ist $F(x) = \int (9x^2 + 4x + 5)\,\mathrm{dx} = 9 \int x^2\,\mathrm{dx} + 4 \int x^1\,\mathrm{dx} + 5 \int x^0\,\mathrm{dx} = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + 5 \cdot x^1 + c = 3x^3 + 2x^2 + 5x + c$.

## 2.3 Anwendungen in der Physik

In der Physik gibt es viele Grössen, die sich ändern, und von denen man entsprechend die Änderungsrate bestimmen möchte. Ist umgekehrt die Änderungsrate einer Grösse sowie ein Wert der Grösse bekannt, so kann man mit Hilfe der Integralrechnung die Grösse selber bestimmen. Das gilt speziell für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Ist $s(t)$ der Ort eines Massenpunktes zur Zeit $t$, so ist die Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} s(t)$ und die Beschleunigung $a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} v(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} s(t)$. Ist also die Funktion $s(t)$ gegeben, kann man durch ein- und zweimaliges Ableiten $v(t)$ und $a(t)$ bekommen. Ist jedoch die Beschleunigung $a(t)$ gegeben, so kann man durch Integration die Geschwindigkeit $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{dt}$ und durch nochmalige Integration den Ort $s(t) = \int v(t)\,\mathrm{dt}$

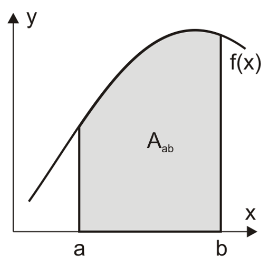
bestimmen. Diese Funktionen sind aber nur bis auf die Integrationskonstanten festgelegt, die aus geeigneten *Anfangsbedingungen* folgen.

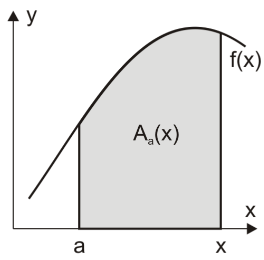
Beispiel:
Beim freien Fall ist die Beschleunigung die konstante Erdbeschleunigung $g$, sodass $a(t) = g$ gilt. Kennt man die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = v(0)$, kann man durch Integration daraus die Geschwindigkeit $v(t) = v_0 + g \cdot t$ bestimmen. Kennt man weiter den Anfangsort $s_0 = s(0)$, so lässt sich daraus weiter der Ort $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ herleiten. Die beiden Grössen $s_0$ und $v_0$ sind die Anfangsbedingungen, welche die Integrationskonstanten festlegen. Statt dem Ort und der Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ hätte man auch den Ort und die Geschwindigkeit zu irgendeinem Zeitpunkt als Anfangswerte vorgeben können, um damit die Integrationskonstanten zu eliminieren.

# 3 Bestimmtes Integral

## 3.1 Flächenfunktionen

Für eine stetige, nicht-negative und für alle $x$-Werte im betrachteten Bereich definierte Funktion $f(x)$ und zwei Werte $a$ und $b$ mit $a < b$ ist die Fläche $A_{ab}$ zwischen dem Graphen von $f$ und der $x$-Achse wie in der nebenstehenden Abbildung oben gezeigt eine wohl-definierte Grösse. Ist $f(x)$ eine lineare Funktion, so ist die Fläche ein Trapez und lässt sich aus $A_{ab} = (b - a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$ berechnen. Für andere Funktionen $f(x)$ ist die obere Begrenzung gekrümmt, sodass die Fläche $A_{ab}$ nicht so einfach bestimmt werden kann.



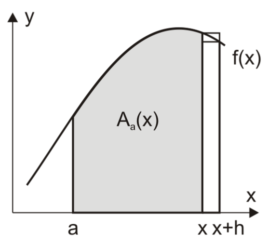




Hält man wie in der nebenstehenden Abbildung unten gezeigt nur den Wert $a$ fest und betrachtet die rechte Grenze als variabel, so gibt das eine monoton wachsende Funktion $A_a(x)$, die für $x \geq a$ definiert ist. Man nennt die Funktion $A_a(x)$ eine *Flächenfunktion* und die dazu gehörige Funktion $f(x)$ deren *Randfunktion*.

Flächenfunktionen können wie andere Funktionen abgeleitet werden. Interessanterweise gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} A_a(x) = f(x) \tag{4}$$

und die Ableitung einer Flächenfunktion $A_a(x)$ ist ihre Randfunktion $f(x)$ oder – anders formuliert – die Flächenfunktion $A_a(x)$ ist eine Stammfunktion ihrer Randfunktion $f(x)$.




Der Beweis wird hier nur skizziert. Betrachtet man die Fläche $A_a(x+h) - A_a(x)$, so ist diese Fläche grösser oder gleich dem Rechteck $h \cdot f(x_1)$ und kleiner oder gleich dem Rechteck $h \cdot f(x_2)$, wobei $x_1$ mit $x \leq x_1 \leq x + h$ der $x$-Wert ist, bei dem $f(x)$ im Intervall $[x, x + h]$ minimal ist, und $x_2$ mit $x \leq x_2 \leq x + h$ der $x$-Wert ist, bei dem $f(x)$ im Intervall $[x, x + h]$ maximal ist. Die Abbildung links deutet die beiden Rechtecke an. Lässt man jetzt $h$ gegen 0 gehen, so wird der Unterschied zwischen dem maximalen und dem minimalen Wert von $f(x)$ im Intervall $[x, x + h]$ immer kleiner, und $A_a(x + h) - A_a(x)$ nähert sich dem Rechteck $h \cdot f(x)$ an, was $A_a(x + h) - A_a(x) = h \cdot f(x)$ ergibt. Dividiert man durch $h$ und lässt $h$ gegen 0 gehen, so bekommt man

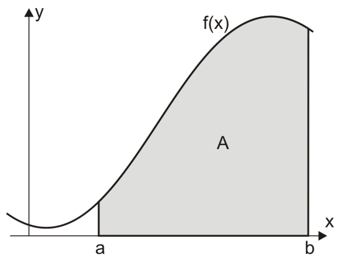
$$\lim_{h \to 0} \frac{A_a(x + h) - A_a(x)}{h} = f(x)$$

und das ist die Definition der Ableitung.

Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der $x$-Achse zwischen den Werten $a$ und $b$ kann somit berechnet werden, wenn man für die Randfunktion $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ gefunden hat. Ist zum Beispiel $A_a(x) = F(x) + c$, so muss $c = -F(a)$ sein, weil $A_a(a) = 0$ ist. Somit ist $A_a(x) = F(x) - F(a)$ und damit auch $A_{ab} = F(b) - F(a)$ für die Flächen in den obigen Abbildungen. Bei diesen Überlegungen ist vorausgesetzt worden, dass $f(x) \geq 0$ ist für alle betrachteten $x$-Werte.

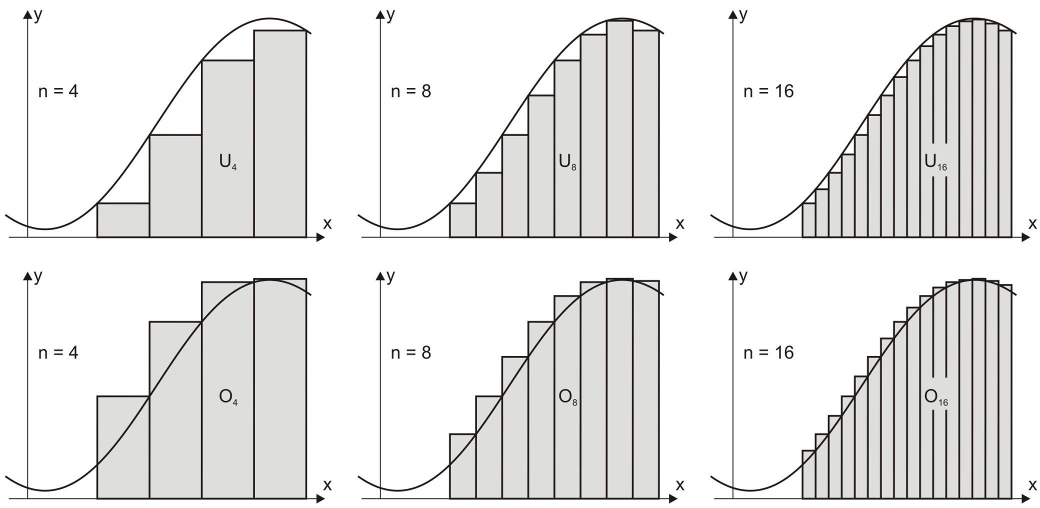
## 3.2 Flächenapproximation

Die Fläche $A$ zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x)$ und der $x$-Achse wie in der Abbildung rechts kann auch auf einem anderen Weg durch Approximation bestimmt werden. Teilt man das Intervall $[a, b]$ in $n$ gleiche Teile und ersetzt die gesuchte Fläche durch eine Summe von Rechtecken als Näherung, wie das in der Abbildung unten gezeigt wird, so entstehen zwei Folgen $(U_n)$ und $(O_n)$. Die Fläche $U_n$ ist die Summe der $n$ Rechtecke, deren eine Seite der $n$-te Teil des Intervalls $[a, b]$ ist, und deren andere Seite der kleinste Wert von $f(x)$ in diesem Teilintervall ist. Die Fläche $O_n$ ist die Summe der $n$ Rechtecke, deren eine Seite wieder der $n$-te Teil des Intervalls $[a, b]$ ist, deren andere Seite aber jetzt der grösste Wert von $f(x)$ in diesem Teilintervall ist. Die Folge $(U_n)$ ist monoton wachsend und die Folge $(O_n)$ ist monoton fallend, und es gilt $U_n \leq U_{n+1} \leq A \leq O_{n+1} \leq O_n$ für jedes $n$. Die beiden Folgen konvergieren beide gegen $A$, sodass




$$\lim_{n\to\infty} U_n = A = \lim_{n\to\infty} O_n$$

gilt. Die Abbildung unten zeigt die Näherungen 4, 8 und 16, und es leuchtet ein, dass die beiden Summen von Rechteckflächen für wachsendes $n$ immer weniger von $A$ abweichen.




## 3.3 Infinitesimalrechnung

Die Differenzial- und Integralrechnung, die zusammen auch Infinitesimalrechnung heissen, sind im Laufe der Zeit auf verschiedene Weisen begründet worden. Die heute übliche Schreibweise geht auf die Vorstellung von infinitesimalen Grössen zurück, die unendlich klein, aber nicht gleich 0 sind. Sind $x$ und $x + \Delta x$ als zwei verschiedene Werte gegeben, und nennt man $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x)$, so ist

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{dx}}$$

die Ableitung der Funktion $f(x)$. Der Ausdruck rechts des Gleichheitszeichens ist also quasi ein Bruch mit der infinitesimalen Grösse dx im Nenner.

Teilt man in der obigen Flächenapproximation das Intervall $[a, b]$ in $n$ gleiche Teile der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ein, und bezeichnet man mit $\underline{x}_i$ beziehungsweise $\overline{x}_i$ den $x$-Wert mit dem kleinsten beziehungsweise grössten Wert von $f(x)$ im $i$-ten Teilintervall, dann gilt

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} f(\underline{x}_i)\Delta x \qquad\qquad O_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x$$

für die Folgen $(U_n)$ und $(O_n)$ von Approximationen, die gegen $A$ konvergieren.

Der gemeinsame Grenzwert der Folgen $(U_n)$ und $(O_n)$, welcher der Fläche zwischen der Randfunktion $f(x)$ und der $x$-Achse zwischen $a$ und $b$ entspricht, wird als

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(\underline{x}_i)\Delta x\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x\Big) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \tag{5}$$

geschrieben und heisst das *bestimmte Integral* der Funktion $f(x)$ mit $a$ als unterer und $b$ als oberer *Integrationsgrenze*. Das Integralzeichen bedeutet also die Summe über unendlich viele Rechtecke mit der endlichen Seitenlänge $f(x)$, der infinitesimalen Seitenlänge dx und damit der Fläche $f(x)\cdot \mathrm{dx}$.

## 3.4 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b \tag{6}$$

für das bestimmte Integral.

Dies ist der *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.* Er folgt einerseits aus der obigen Approximation und andererseits aus der Formel (4). Die Faktor-, Summen- und Differenzenregeln (3) gelten in der Form

$$\int_a^b (r\cdot f(x))\,\mathrm{dx} = r\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \qquad \int_a^b (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} \tag{7}$$

auch für das bestimmte Integral. Die Schreibweise $[F(x)]_a^b$ für $F(b) - F(a)$ ist eine nützliche Konvention.

Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ zwei Stammfunktionen von $f(x)$, sodass also $F_2(x) = F_1(x) + c$ für eine reelle Zahl $c$ gelten muss, dann ist $F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + c) - (F_1(a) + c) = F_1(b) - F_1(a)$. Das bestimmte Integral (5) ist also unabhängig von der Wahl der Stammfunktion.

Das bestimmte Integral ist auch unabhängig von der Wahl der *Integrationsvariablen*, denn es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$$

für eine beliebige Variable. Um eine bestimmte Stammfunktion von $f(x)$ festzulegen, schreibt man häufig

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$$

mit $x$ als variabler Obergrenze des bestimmten Integrals.

# 4 Anwendungen

## 4.1 Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse

Ist eine im betrachteten Bereich nicht-negative Funktion $f(x)$ gegeben, so kann die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von $f(x)$ und der $x$-Achse berechnet werden, indem man erst über das unbestimmte Integral (2) eine Stammfunktion $F(x)$ bestimmt und anschliessend mit dem bestimmten Integral (5) die Grenzen einsetzt.

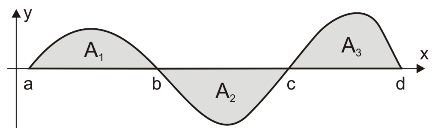
Beispiel:
Um die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = 4x - x^2$ und der $x$-Achse zwischen 1 und 2 zu berechnen, integriert man $f(x)$ und bekommt mit (1) die Stammfunktion $F(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Die gesuchte Fläche ist das bestimmte Integral mit dem Integranden $f(x)$ und den Grenzen 1 und 2. Somit gilt

$$A = \int_1^2 (4x - x^2)\,\mathrm{dx} = \big[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\big]_1^2 = 8 - \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (6).

Bisher sind nur nicht-negative Randfunktionen betrachtet worden. Ist $f(x)$ im ganzen betrachteten Bereich negativ, so ist das bestimmte Integral ebenfalls negativ. Um die Fläche zu bestimmen, muss man also das Vorzeichen wechseln.

Ist eine stetige Funktion $f(x)$ im betrachteten Bereich teilweise positiv und teilweise negativ wie die Funktion in der nebenstehenden Abbildung, so gilt



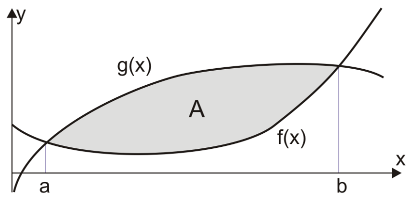

$$\int_a^d f(x)\,\mathrm{dx} = A_1 - A_2 + A_3$$

für das bestimmte Integral in diesem Beispiel. Möchte man $A_2$ positiv zählen, muss man die Nullstellen bestimmen und die Gesamtfläche stückweise mit

$$A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} - \int_b^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^d f(x)\,\mathrm{dx}$$

berechnen.

## 4.2 Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen



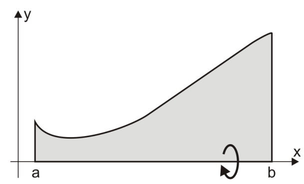

Sind zwei stetige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben, deren Graphen sich wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt in zwei Punkten schneiden, so kann die Fläche $A$ zwischen den zwei Funktionsgraphen bestimmt werden. Gilt $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ und $f(x) < g(x)$ für alle $x$ mit $a < x < b$, so ist

$$A = \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{dx}$$

wegen (7) die gesuchte Fläche. Schneiden sich die Graphen im betrachteten Bereich zwischen $a$ und $b$ mehrmals, bestimmt man die Fläche stückweise wie oben besprochen.

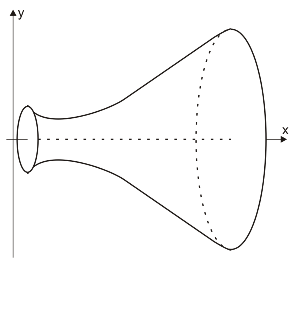
## 4.3 Volumen von Rotationskörpern

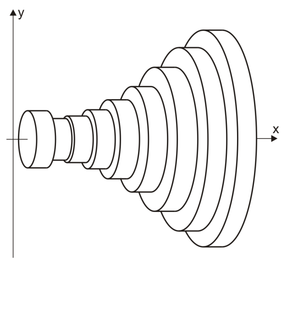
Durch Integrieren kann man nicht nur Flächen, sondern auch Volumina berechnen. Dreht man die Fläche in der nebenstehenden Abbildung um die $x$-Achse, bekommt man einen Rotationskörper, dessen Volumen




$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{dx}$$

ist. Das Volumen kann man wieder durch Approximation bestimmen, indem man den Körper durch $n$ Kreisscheiben der Dicke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ wie in der Abbildung unten approximiert.




Das Volumen einer Kreisscheibe mit Radius $r$ und Dicke $d$ ist $V = \pi \cdot r^2 \cdot d$. Die Dicke ist $d = \Delta x$, und der Radius kommt immer näher zu $r = f(x)$, wenn man $\Delta x$ gegen 0 gehen lässt. Das Integral als Summe über unendlich viele, unendlich kleine Volumina $\pi \cdot (f(x))^2 \cdot \Delta x$ führt zu obigem Integral. Die Kreisscheiben entsprechen den um die $x$-Achse rotierten Rechtecken mit den Flächen $f(\underline{x}_i)\Delta x$ beziehungsweise $f(\overline{x}_i)\Delta x$.