Differenzial- und Integralrechnung IV

Rainer Hauser

September 2012

1 Einleitung

1.1 Ableitung und Integral

Die Ableitung einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ ist definiert durch den Differenzialquotienten als

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

und ist wieder eine Funktion. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und ist somit $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$, so schreibt man

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = F(x) + c \qquad\qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

für das unbestimmte beziehungsweise bestimmte Integral. (Alle im Folgenden vorkommenden Funktionen sind differenzierbar und integrierbar, sodass Differenzierbarkeits- und Integrierbarkeitsüberlegungen weggelassen werden.)

1.2 Erste Ableitungs- und Integrationsregeln

Für Ableitung und Integral gelten die bereits eingeführten Regeln

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(r \cdot f(x)) = r \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x) \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(f(x) \pm g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x) \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}g(x)$$

$$\int (r \cdot f(x))\,\mathrm{dx} = r \int f(x)\,\mathrm{dx} \qquad\qquad \int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{dx} = \int f(x)\,\mathrm{dx} \pm \int g(x)\,\mathrm{dx}$$

für beliebige reelle Zahlen r und Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Diese Identitäten heissen *Faktorregel* beziehungsweise *Summen-* und *Differenzenregel*.

Potenzfunktionen lassen sich gemäss den Regeln

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}x^p = p \cdot x^{p-1} \qquad\qquad \int x^p\,\mathrm{dx} = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} \;\text{ für }\; p \neq -1$$

ableiten beziehungsweise integrieren. Mit diesen und den obigen Regeln lassen sich somit sämtliche Funktionen der Form $x \mapsto a_1 \cdot x^{p_1} + ... + a_n \cdot x^{p_n}$ mit $p_i \neq -1$ ableiten und integrieren.

2 Rationale Funktionen

2.1 Polynome und Polynomfunktionen

Ein *Polynom n-ten Grades* mit der Variablen x ist ein Term von der Form $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ mit reellen Zahlen a_i und $a_n \neq 0$. Eine *Polynomfunktion n-ten Grades* ist eine Funktion $x \mapsto f(x)$, wobei $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit der Variable x ist.

Eine *algebraische Gleichung n-ten Grades* ist eine Gleichung der Form $f(x) = 0$, wobei $f(x)$ eine Polynomfunktion n-ten Grades ist. Will man beispielsweise die Nullstellen einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ bestimmen, löst man die algebraische Gleichung zweiten Grades $ax^2 + bx + c = 0$.

2.2 Rechnen mit Polynomen

Addiert oder subtrahiert man zwei Polynome, bekommt man wieder ein Polynom. Addiert man beispielsweise $4x - 7$ zu $3x^2 - 2x + 5$, resultiert das Polynom $3x^2 + 2x - 2$. Multipliziert man zwei Polynome mit Grad m und n, entsteht ein Polynom vom Grad $m + n$. Das Produkt von $3x^2 - 2x + 5$ und $4x - 7$ zum Beispiel ergibt $12x^3 - 29x^2 + 34x - 35$.

Dividiert man zwei Polynome, so ist das Resultat nicht immer ein Polynom. Schon die einfache Division 1 geteilt durch x resultiert in x^{-1}, was kein Polynom ist. Teilt man hingegen $12x^3 - 29x^2 + 34x - 35$ durch $4x - 7$, erhält man wieder $3x^2 - 2x + 5$ wie im obigen Beispiel durch Multiplikation gezeigt.

Analog wie beim Übergang von den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erweitert man die Menge der Polynomfunktionen zur Menge der rationalen Funktionen. Der Quotient von zwei Polynomen ist eine *rationale Funktion*. Ähnlich wie bei der Division von Dezimalzahlen gibt es einen Divisionsalgorithmus für Polynome. Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Division, die ohne Rest aufgeht, sodass das Resultat wieder ein Polynom ist. Im Allgemeinen geht die Division jedoch nicht auf und es bleibt ein Rest, der einen kleineren Grad hat als der Divisor.

```
 6x³ - 37x² + 47x + 20 : x - 4 = 6x² - 13x - 5
-(6x³ - 24x²)
      -13x² + 47x + 20
    -(-13x² + 52x)
              -5x + 20
            -(-5x + 20)
                    0
```

2.3 Nullstellen, Definitionslücken und Pole

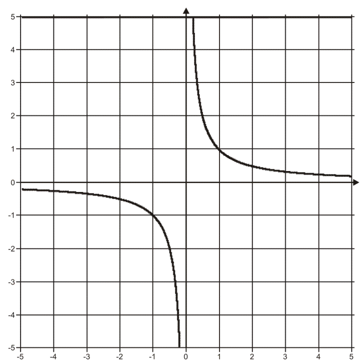
Ist $f(x)$ eine Polynomfunktion, so nennt man die Lösungen der algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ die Nullstellen von $f(x)$. Der Wert x_0 ist genau dann eine Nullstelle des Polynoms $f(x)$, wenn es ein Polynom $g(x)$ gibt, sodass $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ ist. Im Beispiel in der obigen Abbildung hat also das Polynom $6x^3 - 37x^2 + 47x + 20$ die Nullstelle $x_0 = 4$, und es gilt $(6x^3 - 37x^2 + 47x + 20) = (x - 4) \cdot (6x^2 - 13x - 5)$.

Bei rationalen Funktionen können aber auch die Polynome im Nenner Nullstellen haben, was deshalb problematisch ist, weil ein Bruch nicht definiert ist, wenn der Nenner 0 ist. Bei einer rationale Funktion spricht man in diesem Fall von einer *Definitionslücke.* Ist x_0 gleichzeitig eine Nullstelle des Polynoms $f_Z(x)$ im Zähler und eine Nullstelle des Polynoms $f_N(x)$ im Nenner, so gibt es zwei Polynome $g_Z(x)$ und $g_N(x)$, sodass $f_Z(x) = (x - x_0) \cdot g_Z(x)$ und $f_N(x) = (x - x_0) \cdot g_N(x)$ gilt. Für die rationale Funktion folgt

$$\frac{f_Z(x)}{f_N(x)} = \frac{(x - x_0) \cdot g_Z(x)}{(x - x_0) \cdot g_N(x)}$$

und der Faktor $(x - x_0)$ kann somit gekürzt werden.

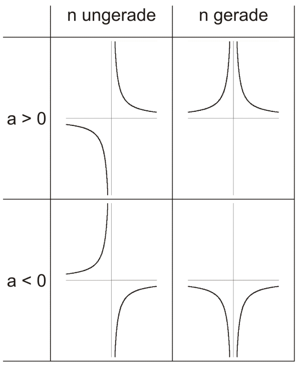
Eine Definitionslücke x_0 ist *behebbar*, wenn sie auch eine Nullstelle des Zählerpolynoms ist, und wenn sie nach dem Kürzen aller Faktoren $(x - x_0)$ keine Definitionslücke mehr ist. Sind sämtliche behebbaren Definitionslücken auf diese Weise behoben, haben Zähler- und Nennerpolynom keine gemeinsamen Nullstellen mehr.



Der Wert x_0 heisst *Nullstelle* der rationalen Funktion, wenn x_0 eine Nullstelle des Zählerpolynoms, nicht jedoch des Nennerpolynoms ist, wenn also allfällige behebbare Definitionslücken x_0 behoben sind. Der Wert x_0 heisst *Pol* der rationalen Funktion, wenn x_0 eine Nullstelle des Nennerpolynoms, nicht aber des Zählerpolynoms ist. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{-1}$, also der rationalen Funktion mit dem Zählerpolynom 1 und dem Nennerpolynom x, für die $x_0 = 0$ ein Pol ist.

2.4 Umgebung eines Pols

Falls alle behebbaren Definitionslücken einer rationalen Funktion behoben sind und x_0 eine n-fache Nullstelle des Nennerpolynoms ist, so nennt man x_0 einen *Pol n-ter Ordnung*. Die vertikale Gerade durch x_0 heisst *vertikale Asymptote*. Im Pol selber ist die rationale Funktion nicht definiert. Kommt man beispielsweise in der obigen Abbildung mit dem Graphen von $f\colon x \mapsto x^{-1}$ von negativen x-Werten immer näher zum Wert $x = 0$, der ein Pol erster Ordnung ist, so geht $f(x)$ gegen $-\infty$ und kommt man von positiven x-Werten immer näher zum Pol $x = 0$, so geht $f(x)$ gegen $+\infty$. Beim Wert $x = 0$ ist $f(x)$ nicht definiert. Die y-Achse ist eine vertikale Asymptote.



Nähert sich x dem Pol x_0 und hat der Pol die Ordnung n, so verhält sich die rationale Funktion wie $x \mapsto \frac{a}{(x-x_0)^n}$ für ein $a \neq 0$. Je nach der Ordnung n des Pols und dem Vorzeichen von a gibt es die in der nebenstehenden Abbildung gezeigten Fälle für das Verhalten der Funktion in der Umgebung des Pols.

Beispiel:
Die rationale Funktion $f(x)$ mit dem Zählerpolynom $8x^2 - 32$ und dem Nennerpolynom $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ kann als

$$f(x) = \frac{8x^2 - 32}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} = \frac{8(x+2)(x-2)}{(x+2)^3}$$

geschrieben werden, wobei die Form rechts vollständig faktorisiert ist. Nach dem Kürzen des einen Faktors $(x + 2)$ bleibt

$$f(x) = \frac{8(x-2)}{(x+2)^2}$$

übrig. Der Wert $x_0 = -2$ ist also ein Pol zweiter Ordnung. In der Nähe von $x = -2$ ist der Zähler ungefähr $8 \cdot ((-2) - 2) = -32$, während der Nenner beliebig klein wird, sodass sich die Funktion also wie

$$\frac{-32}{(x+2)^2}$$

verhält. Mit $n = 2$ und $a = -32$ geht $f(x)$ somit nach obiger Abbildung gegen $-\infty$, wenn man sich von links oder von rechts dem Pol $x_0 = -2$ nähert.

3 Produkt- und Quotientenregel

3.1 Produktregel und Folgerungen

Ist eine Funktion gegeben als $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, so ist die Ableitung nicht einfach analog zu Addition oder Subtraktion das Produkt von $f'(x)$ und $g'(x)$. Das kann man an Beispielen wie $h(x) = x^2 = x \cdot x$ sofort sehen, denn es gilt $h'(x) = 2x \neq 1 \cdot 1 = 1$. Die Regel für das Produkt zweier Funktionen kann man aus dem Differenzialquotienten von $f(x)g(x)$ über die Umformungsschritte

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

herleiten. Lässt man h gegen 0 gehen, so gibt das $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Somit folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{1}$$

für die Ableitung des Produkts zweier Funktionen. Diese Regel heisst *Produktregel* und erlaubt es zum Beispiel faktorisierte Polynome abzuleiten, ohne sie erst auszumultiplizieren. Wegen dem Kommutativgesetz $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ erwartet man zudem, dass die Produktregel symmetrisch bezüglich Vertauschen von $f(x)$ und $g(x)$ ist, was offensichtlich auch der Fall ist.

Beispiel:
Ist $h(x) = f(x)g(x) = x^2$ mit $f(x) = g(x) = x$ wie im oben betrachteten Beispiel, so ist korrekt $h'(x) = 2x = 1 \cdot x + x \cdot 1$.

Mit vollständiger Induktion kann man als Folgerung von (1) die Regeln

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\Big(f(x)^n\Big) = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x) \qquad \int \Big(f'(x) \cdot f(x)^n\Big)\mathrm{dx} = \frac{1}{n+1} \cdot f(x)^{n+1} + c \text{ für } n \neq -1 \tag{2}$$

für die Ableitung und Integration der Potenz einer Funktion beweisen.

Beispiel:
Ist $f(x) = (x^2 + 2)^5$, so ist $f'(x) = 5 \cdot (x^2 + 2)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 2)^4$.

3.2 Reziprok- und Quotientenregel

Ist $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, so lässt sich die Ableitung mit

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = -\frac{f(x+h) - f(x)}{h \cdot f(x+h) \cdot f(x)} = -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x+h) \cdot f(x)}$$

und dem Grenzübergang $h \to 0$ bestimmen. Die daraus folgende Regel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\Big(\frac{1}{f(x)}\Big) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \tag{3}$$

heisst *Reziprokregel*.

Beispiel:
Mit der Reziprokregel kann man für $f(x) = x^3$ und $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^3}$ alternativ zur Ableitung der Potenzfunktion x^{-3} die Ableitung bestimmen. Es gilt $g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2} = -\dfrac{3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$.

Aus der Produktregel (1) und der Reziprokregel (3) folgt unmittelbar die *Quotientenregel*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \tag{4}$$

wegen $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$.

Beispiel:
Ist $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 1}$, so ist $f'(x) = \dfrac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3x + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-3x^2 - 4x + 3}{(x^2 + 1)^2}$.

4 Diskussion rationaler Funktionen

4.1 Allgemeines Vorgehen

Um eine rationale Funktion zu diskutieren und zu skizzieren, geht man wie folgt vor:

1. Behebbare Definitionslücken beheben:

   Zähler- und Nennerpolynom werden soweit faktorisiert, wie es nötig ist, um gemeinsame Nullstellen zu finden und zu kürzen. (Ist das Zählerpolynom beispielsweise $(x+1)(x-1)$ und das Nennerpolynom $(x+2)(x-1)$ so lässt sich der Faktor $(x-1)$ kürzen. Es ist aber zu beachten, dass die ursprüngliche rationale Funktion nicht exakt gleich der gekürzten Funktion ist, weil die ursprüngliche Funktion für $x = 1$ nicht definiert ist, während die gekürzte Funktion an dieser Stelle definiert ist. Das ist ein Detail, das im Folgenden ignoriert wird.)

2. Pole bestimmen:

   Die Pole der rationalen Funktion und ihre Ordnung zeigen, wo die Funktion vertikale Asymptoten hat, und wie sich die Funktion in der Umgebung des Pols verhält.

3. Nullstellen berechnen:

   Wie bei der Diskussion von Polynomfunktionen zeigen die Nullstellen, wo der Graph die x-Achse schneidet.

4. Verhalten im Unendlichen evaluieren:

   Das Verhalten der Funktion im Unendlichen und weitere Asymptoten neben den vertikalen Asymptoten der Pole zeigen, wie der Graph im Grossen aussieht. Dieser Punkt wird im Folgenden genauer besprochen.

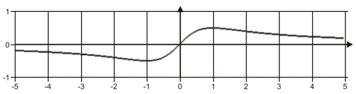
5. Extrema, Terrassenpunkte und Wendepunkte finden:

   Wie bei der Diskussion der Polynomfunktionen sind Extrema, Terrassenpunkte und Wendepunkte wichtige Stellen bei der Analyse einer rationalen Funktion. Sie lassen sich gleich wie bei Polynomfunktionen finden, für die Ableitungen wird aber die Quotientenregel (4) benötigt.

6. Graph zeichnen:

   Hat man Pole, Nullstellen, Extrema, Terrassenpunkte, Wendepunkte und Asymptoten bestimmt, lässt sich der Graph skizzieren.

4.2 Verhalten im Unendlichen und Asymptoten

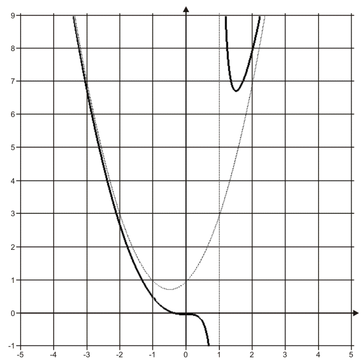


Polynomfunktionen mit Grad $n \geq 1$ gehen für grosse $|x|$ immer gegen $\pm\infty$. Rationale Funktionen hingegen können sich, wie der nebenstehende Graph für die Funktion $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ zeigt, im Unendlichen anders verhalten. Der Graph nähert sich für grosse $|x|$ der x-Achse, die somit eine horizontale Asymptote ist.

Ist der Grad m des Zählerpolynoms kleiner oder gleich dem Grad n des Nennerpolynoms, so nähert sich der Graph für grosse $|x|$ einer horizontalen Asymptote. Etwas schwieriger ist der Fall, wenn der Grad des Zählerpolynoms grösser als der Grad des Nennerpolynoms ist, weil so kompliziertere asymptotische Kurven entstehen. Das asymptotische Verhalten einer rationalen Funktion in den drei möglichen Fälle $m < n$, $m = n$ und $m > n$ wird im Folgenden an je einem Beispiel besprochen.

Ist $m < n$ wie bei $x \mapsto \dfrac{8x-16}{x^2+4x+4}$, so lässt sich die rationale Funktion zu $\dfrac{x^2(\frac{8}{x}-\frac{16}{x^2})}{x^2(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2})} = \dfrac{\frac{8}{x}-\frac{16}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}$ umformen. Man sieht, dass der Zähler für $x \to \pm\infty$ in diesem Beispiel gegen 0 und der Nenner gegen 1 geht. Allgemein lässt sich sagen, dass für eine rationale Funktion $f(x)$ mit $m < n$ die Gerade $y = 0$ eine horizontale Asymptote ist, und dass somit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ gilt.

Für $m = n$ kann man analog vorgehen und bekommt für die Funktion $x \mapsto \dfrac{2x}{x-1}$ zum Beispiel $\dfrac{x \cdot 2}{x(1-\frac{1}{x})} = \dfrac{2}{1-\frac{1}{x}}$, was für $x \to \pm\infty$ gegen 2 geht. Allgemein gilt für $m = n$, dass eine Gerade $y = c$ für ein $c \neq 0$ eine horizontale Asymptote ist, und dass somit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ gilt.



Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$ mit dem Pol $x = 1$, der als vertikale Asymptote punktiert eingezeichnet ist. Dividiert man x^3 durch $x - 1$, bekommt man $x^2 + x + 1$ und den Rest $\dfrac{1}{x-1}$, der für grosse $|x|$ verschwindet, sodass sich die Funktion asymptotisch wie die heller eingezeichnete Parabel $x^2 + x + 1$ verhält. Diese Parabel ist eine *asymptotische Kurve*, wie sie im Fall $m > n$ allgemein das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ beschreibt.

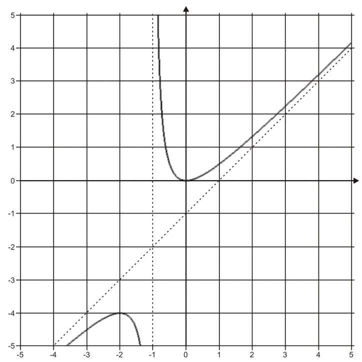
4.3 Beispiel einer rationalen Funktion

Beispiel:

Diskussion der Funktion $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$:

Die Funktion $f(x)$ hat keine behebbare Definitionslücke, aber den Pol $x = -1$ erster Ordnung und die doppelte Nullstelle $x = 0$. Man kann $f(x)$ durch Division mit Rest zu $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ umformen.

Somit weiss man, dass $f(x)$ für $x > -1$ positiv und für $x < -1$ negativ ist, die x-Achse bei $x = 0$ berührt, bei $x = -1$ eine vertikale Asymptote hat und weiter als asymptotische Kurve die Gerade $y = x - 1$ besitzt. Diese Information über den Graphen von $f(x)$ bekommt man ohne Ableiten.



Die Ableitung $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ hat die beiden Nullstellen $x = -2$ und $x = 0$. In den Punkten mit den Koordinaten $(-2, -4)$ und $(0, 0)$ hat der Graph von $f(x)$ also die Steigung 0. Betrachtet man Werte $f(x)$ in der Nähe der beiden Nullstellen von $f'(x)$, sieht man, dass $f(x)$ bei $x = -2$ ein Maximum und bei $x = 0$ ein Minimum hat.

Mit den beiden Extrema von $f(x)$ und den Asymptoten kann man den Graphen von $f(x)$ schon recht genau skizzieren. Die Abbildung rechts zeigt den Graphen von $f(x)$ zusammen mit der vertikalen Asymptote bei $x = -1$ und der asymptotischen Geraden $y = x - 1$.

4.4 Uneigentliche Integrale

Ist die x-Achse eine horizontale Asymptote einer Funktion, kann es sein, dass sich die Funktion für grosse x so schnell der x-Achse nähert, dass die Fläche einen endlichen Wert hat und man das Integral mit der Obergrenze ∞ berechnen kann.

Allgemein nennt man ein bestimmtes Integral ein *uneigentliches* Integral, wenn mindestens ein Grenze nicht definiert ist. Eine Grenze kann beispielsweise $\pm\infty$ sein.

Beispiel:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty = \lim_{c\to\infty}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^c = \lim_{c\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{c}\Big) = 1$$

Von uneigentlichen Integralen spricht man auch, wenn eine Funktion für einen endlichen x-Wert nicht definiert ist, weil die Funktion dort einen Pol hat.

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 2$$