Komplexe Zahlen

Rainer Hauser

Januar 2015

1 Einleitung

1.1 Zahlen und Operationen auf Zahlen

Addiert man mit Eins als erster gegebener Zahl beginnend sukzessive Eins zu einer bereits gefundenen Zahl, so bekommt man schrittweise die *natürlichen* Zahlen 1, 2, 3 und so weiter. Wendet man die Operation *Addition* auf die natürliche Zahlen an, bekommt man immer wieder eine natürliche Zahl als Resultat. Wendet man hingegen die *Subtraktion* als Umkehroperation der Addition auf natürliche Zahlen an, so entstehen auch *negative* Zahlen wie etwa in der Rechnung $5 - 7 = -2$. Um also alle Additionen und Subtraktionen ausführen zu können, muss man von den natürlichen Zahlen zu den *ganzen* Zahlen übergehen. Man sagt, dass die ganzen Zahlen abgeschlossen sind gegenüber Addition und Subtraktion, die man Operationen erster Stufe nennt.

Durch die Operation *Multiplikation* zweier ganzer Zahlen bleibt man in den ganzen Zahlen. Die *Division* als Umkehroperation der Multiplikation führt aber aus den ganzen Zahlen hinaus zu den *gebrochenen* Zahlen wie im Beispiel $3 \div 5 = 0.6$. Damit man jede Zahl mit jeder Zahl multiplizieren und jede Zahl durch jede Zahl (ausser 0) dividieren kann, muss man also zu den *rationalen* Zahlen übergehen. Die rationalen Zahlen sind abgeschlossen gegenüber Multiplikation und Division, die Operationen zweiter Stufe genannt werden.

Durch das *Potenzieren* als Operation dritter Stufe entstehen einerseits *irrationale* Zahlen wie beispielsweise durch $2^{0.5} = \sqrt{2} \approx 1.414213562$, aber auch *imaginäre* Zahlen wie etwa durch $(-1)^{0.5} = \sqrt{-1} = i$. Lässt man beim Potenzieren als Basis nur rationale Zahlen und als Exponent nur ganze Zahlen zu, so bleibt man zwar im Bereich der rationalen Zahlen. Sobald man aber als Exponent auch rationale Zahlen erlaubt, verlässt man die rationalen Zahlen. Weil Potenzieren nicht kommutativ ist, gibt es dafür die zwei Umkehroperationen *Radizieren* und *Logarithmieren*. Das Ziehen von Wurzeln, das auch Radizieren genannt wird, lässt sich durch gebrochene Exponenten darstellen, nicht aber der Logarithmus.

1.2 Zahlenmengen und Darstellung von Zahlen

Für die Zahlenmenge der natürlichen Zahlen hat sich das Symbol $\mathbb{N}$ eingebürgert, und für die Menge der ganzen Zahlen schreibt man $\mathbb{Z}$. Im Dezimalsystem lassen sich die ganzen Zahlen durch die Ziffern von 0 bis 9 und einem Vorzeichen darstellen. Das Dezimalsystem ist ein *Stellenwertsystem*, bei dem der Wert einer Ziffer von dessen Stelle in der Zahl abhängt. In der Zahl 12 beispielsweise bedeutet die Ziffer 2 den Wert 2 respektive $2 \cdot 10^0$, während die Ziffer 1 den Wert 10 beziehungsweise $1 \cdot 10^1$ bedeutet.

Die Zahlenmenge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet, und rationale Zahlen schreibt man entweder als gewöhnliche Brüche wie $\frac{3}{4}$ oder als Dezimalbrüche wie 0.75. Jede rationale Zahl lässt sich entweder als Dezimalbruch mit endlich vielen Stellen wie etwa 0.75 oder als periodischer Dezimalbruch wie etwa $0.\overline{3}$ schreiben, wobei zu beachten ist, dass sich Dezimalbrüche mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen Stellen nach dem Dezimalpunkt auch als periodische Dezimalbrüche darstellen lassen, denn es gilt beispielsweise $0.75 = 0.74\overline{9}$.

Fügt man zu den rationalen Zahlen noch die irrationalen Zahlen wie $\sqrt{2}$, π und die Euler'sche Zahl e hinzu, so bekommt man die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen* Zahlen. Während aber die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ alle abzählbar unendlich sind, und ihre Mächtigkeit somit $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ ist, gibt es überabzählbar unendlich viele irrationale Zahlen. Es kommen also sehr viele zusätzliche Zahlen zu $\mathbb{R}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ sind. Die irrationalen Zahlen lassen sich theoretisch durch Dezimalbrüche darstellen, die unendlich viele Stellen nach dem Dezimalpunkt haben, aber ohne Periode sind, was natürlich praktisch nicht geht.

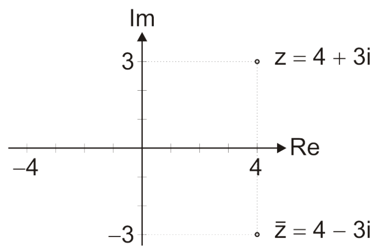
Fügt man zu den reellen Zahlen die eine imaginäre Zahl $i = \sqrt{-1}$ hinzu, entsteht die Menge $\mathbb{C}$ der *komplexen* Zahlen, wenn man verlangt, dass sämtliche Operationen erster, zweiter und dritter Stufe (ausser der Division durch 0) mit komplexen Zahlen als Eingabewerte wieder komplexe Zahlen ergeben. Dazu muss man aber wissen, wie man Rechenresultate wie beispielsweise $1 + i$ interpretiert.

2 Komplexe Zahlen in kartesischer Form

2.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Wenn in einem Zimmer fünf Personen sind und sechs hinausgehen, so muss eine Person hineingehen, damit das Zimmer leer ist. Dieser bekannte Witz ist nur deshalb lustig, weil jedermann weiss, was eine Person ist, nicht aber was minus eine Person ist. Sobald man das Zimmer mit einem Bankkonto und die Personen mit Geld austauscht, ist der Witz nicht mehr lustig, denn wenn jemand sein Bankkonto überzieht, muss er erstens wieder Geld einzahlen, damit nichts mehr auf dem Konto ist, und hat für die Zeit mit negativem Kontostand happige Zinsen zu zahlen. Der Unterschied zwischen $+1$ und -1 als Lösungen der Gleichung $x^2 = 1$ ist also völlig klar. Was hingegen der Unterschied zwischen i und $-i$ ist, lässt sich nicht sagen, denn welche der Lösungen von $x^2 = -1$ man i und welche man $-i$ nennt, ist willkürlich. Man könnte sie mit gleichem Recht auch umgekehrt benennen.

Will man mit komplexen Zahlen rechnen, nimmt man an, eine der beiden Lösungen von $x^2 = -1$ sei als die *imaginäre Einheit* ausgewählt und mit i bezeichnet worden. Somit weiss man, dass $i^2 = (-i)^2 = -1$ gilt. Auf den ersten Blick ist jedoch nicht klar, was $1+i$ bedeuten könnte. Weil aber 1 und i inkompatible Zahlen sind, kann man annehmen, dass sich $1 + i$ nicht mehr weiter vereinfachen lässt. Deshalb definiert man eine komplexe Zahl z als $z = a + b \cdot i$, wobei a und b reelle Zahlen sind. Dabei nennt man a den *Realteil* und b den *Imaginärteil* der komplexen Zahl z und schreibt $a = \mathrm{Re}(z)$ und $b = \mathrm{Im}(z)$. Gilt $b = 0$, so ist z eine reelle Zahl, und ist $a = 0$, so nennt man z eine rein imaginäre Zahl.



Man nennt z geschrieben als $a+bi$ die *kartesische Form* der komplexen Zahl z und schreibt dafür manchmal auch (a, b). Zeichnet man den Punkt (a, b) in einem kartesischen Koordinatensystem, in dem die x-Achse dem Realteil und die y-Achse dem Imaginärteil entspricht wie in der nebenstehenden Abbildung, so wird aus der komplexen Zahl $z = 4 + 3i$ ein Punkt mit den Koordinaten $(4, 3)$ in der Gauss'schen Zahleneben, die auch *komplexe Zahlenebene* heisst.

Weil es willkürlich ist, welche der Lösung von $x^2 = -1$ man mit i benennt, bedeutet das Vertauschen von i und $-i$ Spiegelung an der mit Re bezeichneten Achse. Ist $z = a + bi$, so nennt man die Zahl $\overline{z} = a - bi$ die zu z *konjugiert komplexe* Zahl. Dies ist in der Abbildung am Beispiel $z = 4 + 3i$ und $\overline{z} = 4 - 3i$ gezeigt, die man auch mit Koordinaten als $(4, 3)$ und $(4, -3)$ bezeichnen kann. Man beachte, dass beide Punkte gemäss Satz von Pythagoras den gleichen Abstand 5 vom Nullpunkt haben.

Neben den Tatsachen, dass $i^2 = (-i)^2 = -1$ gilt, und dass sich $1 + i$ nicht mehr weiter vereinfachen lässt, kann man davon ausgehen, dass auch die komplexen Zahlen die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze erfüllen. Unter diesen Voraussetzungen kann man mit den komplexen Zahlen rechnen.

2.2 Addition und Subtraktion in kartesischer Form

Sind $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ zwei komplexe Zahlen, so gilt für die Addition, wenn man die Summanden vertauscht und i ausklammert, $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ und für die Subtraktion $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$. Addition und Subtraktion lassen sich somit komponentenweise berechnen, was in Koordinaten der Addition und Subtraktion von

Vektoren entspricht. Das kann man als $(a_1, b_1) \pm (a_2, b_2) = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$ schreiben. Addiert man also beispielsweise $3+5i$ und $1-2i$, so bekommt man $4+3i$. Man beachte, dass die Addition einer komplexen Zahl und seiner konjugiert komplexen Zahl $z+\overline{z}$ immer die reelle Zahl $2 \cdot \mathrm{Re}(z)$ ergibt.

Um die Addition und Subtraktion zu definieren, muss man also nur verlangen, dass sich einerseits $a+bi$ für reelle Zahlen a und b nicht mehr vereinfachen lässt, und dass die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze auch für komplexe Zahlen gelten. Speziell muss sich in $b_1 i + b_2 i$ die imaginäre Zahl i mit Hilfe des Distributivgesetzes ausklammern lassen.

2.3 Multiplikation und Division in kartesischer Form

Sind $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ zwei komplexe Zahlen, so gilt für die Multiplikation wegen den Distributivgesetzen $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, wie man durch Ausmultiplizieren und mit Hilfe von $i^2 = -1$ leicht sehen kann. Man beachte, dass die Multiplikation einer komplexen Zahl mit seiner konjugiert komplexen Zahl $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ gibt, was in der komplexen Ebene dem Quadrat des Abstandes vom Nullpunkt entspricht. Deshalb definiert man den *Betrag* einer komplexen Zahl z als $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Während die Multiplikation zweier komplexer Zahlen mehr oder weniger offensichtlich ist, braucht die Division einen kleinen Trick, um zu einem einfachen Verfahren zu kommen. Sind $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ zwei komplexe Zahlen, so gilt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

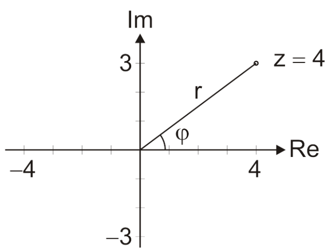
für die Division. Man erweitert den Bruch mit der zum Nenner konjugiert komplexen Zahl $\overline{z_2}$, womit man im Nenner eine reelle Zahl bekommt.

3 Komplexe Zahlen in Polarform

3.1 Polarkoordinaten in der komplexen Zahlenebene

Die kartesische Form $z = a+bi$ für eine komplexe Zahl ist nicht die einzige und auch nicht immer die geeignetste Darstellungsform. So wie es für die Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem auch die Polarkoordinatendarstellung gibt, lassen sich die komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene durch einen Winkel und den Abstand vom Nullpunkt eindeutig festlegen.

Eine komplexe Zahl z ist durch den Abstand $|z|$ vom Nullpunkt und durch den Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn von der positiven reellen Achse aus gemessen eindeutig bestimmt. Die nebenstehende Abbildung zeigt dies für die komplexe Zahl $z = 4+3i$. Die Null, also die komplexe Zahl $z = 0+0i$, ist eine Ausnahme, denn für sie genügt der Abstand $|z|$ allein, weil der Winkel φ nicht definiert ist.



Der Abstand $r = |z|$ heisst *Betrag* und der Winkel $\varphi = \arg(z)$ heisst *Argument* der komplexen Zahl z. Mit Hilfe der Trigonometrie lässt sich eine komplexe Zahl z in kartesischer Form $a+bi$ in die Polarform mit dem Betrag r und dem Argument φ umrechnen und umgekehrt. Ist r der Betrag und φ das Argument der komplexen Zahl z, so ist

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \tag{1}$$

die Zahl z in kartesischer Form. Man kann auch $z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot i$ schreiben, um die kartesische Form $a+bi$ deutlicher zu machen. Ist $z = a+bi$ in kartesischer Form gegeben, so gilt

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{2}$$

für diese Zahl in Polarform, wobei $0 \leq \varphi < 2\pi$ angenommen wird.

Beispiel:
Die komplexe Zahl $z = 4 + 3i$ hat den Betrag $r = |z| = 5$ und das Argument $\varphi = \tan^{-1}(0.75) \approx 0.6435$ im Bogenmass, was etwa $36.9°$ im Gradmass entspricht. Umgekehrt ist $a \approx 5 \cdot \cos(0.6435) \approx 4.000003$ und $b \approx 5 \cdot \sin(0.6435) \approx 2.999996$ in $z = a + bi$. Die Ungenauigkeit von a und b liegt natürlich daran, dass φ gerundet worden ist.

3.2 Multiplikation in Polarform

Die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden in Polarform komplizierter, als sie es in kartesischer Form sind. Die Multiplikation hingegen ist in Polarform anschaulicher. Multipliziert man die zwei komplexen Zahlen $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$ miteinander, so ergibt das $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + r_1r_2(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2))i$, was sich durch die Additionstheoreme zu $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ umformen lässt.

Multipliziert man also zwei komplexe Zahlen, so multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente. Multipliziert man die zwei konjugiert komplexen Zahlen z und $\overline{z}$, so wird der Betrag $|z|^2$, während sich die beiden Winkel aufheben. Für das Resultat ist wie für alle reellen Zahlen $\varphi = 0$.

3.3 Potenzieren in Polarform

Wie Addition und Subtraktion in kartesischer Form einfacher ist, so ist Potenzieren in Polarform einfacher. Dazu braucht man jedoch die *Euler'sche Formel*

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \tag{3}$$

mit der Euler'schen Zahl e, aus der für $\varphi = \pi$ die berühmte *Euler'sche Identität*

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

folgt, in der die fünf für die Mathematik wichtigen Zahlen 0, 1, π, e und i elegant vorkommen. Dank (1) und (3) lässt sich jede komplexe Zahl als $re^{i\varphi}$ schreiben, wobei $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ gilt.

Ist n eine natürliche Zahl, so lässt sich für die komplexe Zahl z die Potenz z^n als $z^n = (re^{i\varphi})^n$ schreiben, woraus $z^n = r^n e^{in\varphi}$ folgt. Für komplexe Exponenten w definiert man $z^w = e^{w\ln(z)}$, was für reelle Zahlen z und w dem Basiswechselsatz entspricht. Wegen $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ gilt für den Logarithmus naturalis erweitert auf komplexe Zahlen, dass $\ln(z) = \ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$ beziehungsweise $\ln(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ gilt. Der Betrag bestimmt also den Realteil und das Argument den Imaginärteil. Sucht man die Lösung der Gleichung $e^w = z$, so ist w anders als im Fall des reellen Logarithmus nicht eindeutig, denn das Argument ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Zum Berechnen von z^w für zwei komplexe Zahlen z und w formt man diese somit erst mit (2) in Polarform um und benutzt dann den Logarithmus naturalis erweitert auf komplexe Zahlen.

4 Gleichungen mit komplexen Lösungen

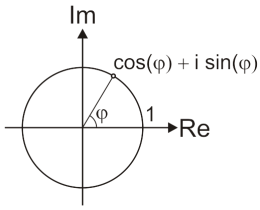
4.1 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ haben zwei, eine oder null Lösungen je nach dem Wert, den die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ annimmt. Das gilt jedoch nur, wenn man die Lösungen auf die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen beschränkt. Erlaubt man auch Lösungen aus $\mathbb{C}$, so hat jede quadratische Gleichung immer zwei Lösungen, die möglicherweise zusammenfallen. Ist eine der beiden Lösungen keine reelle Zahl, so ist auch die andere Lösung keine reelle Zahl, und die beiden Lösungen sind konjugiert komplex.

Beispiel:
Die Gleichung $x^2 - 4x + 8 = 0$ hat die Diskriminante $D = 16 - 32 = -16$. Damit sind die beiden Lösungen die komplexen Zahlen $x_{1,2} = 2 \pm 2i$.

Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die zwei Lösungen x_1 und x_2, die auch zusammenfallen oder komplexe Zahlen sein dürfen, so gilt $ax^2+bx+c = a(x-x_2)(x-x_2)$. Erlaubt man komplexe Zahlen als Lösungen für quadratische Gleichungen, lässt sich somit jede quadratische Gleichung als Produkt von zwei linearen Termen der Form $x - x_i$ faktorisieren.

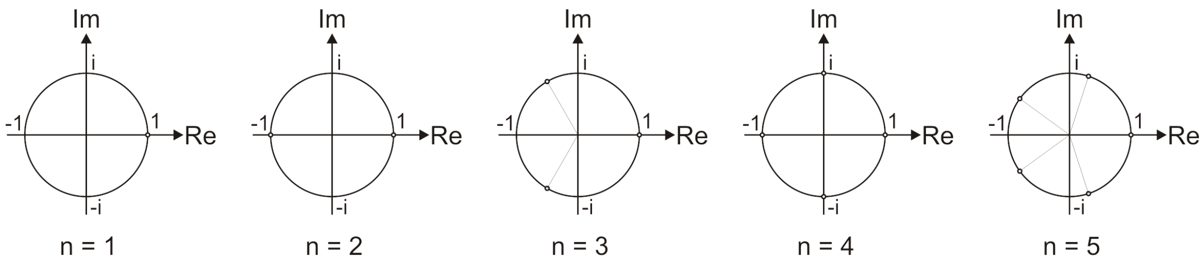
4.2 Wurzeln von Eins



Vergrössert man den Winkel φ sukzessive in $z = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, so bewegt sich z im Gegenuhrzeigersinn auf einem Kreis mit Radius 1 um den Nullpunkt in der komplexen Zahlenebene wie in er nebenstehenden Abbildung gezeigt. Ist $\varphi = 0$, so ist $z = 1$. Nach einer oder mehreren ganzen Umdrehungen ist φ ein Vielfaches von 2π, und es gilt wieder $z = 1$.

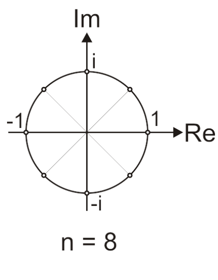
Multipliziert man $\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1)$ und $\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)$, so ist das Resultat wie oben gezeigt $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$. Diese Eigenschaft kann man benutzen, um die Lösungen von Gleichungen der Form $z^n = 1$ für alle möglichen $n \in \mathbb{N}$ zu finden.

Nimmt man die komplexe Zahl $z_1 = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$, so ist sie sicher eine Lösung von $z^n = 1$, denn multipliziert man z_1 n-mal mit sich selber, so addieren sich die Winkel $\frac{2\pi}{n}$ zu $n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$. Aber auch die Zahlen $z_2 = z_1^2$ und $z_3 = z_1^3$ und so weiter bis $z_n = z_1^n = 1$ sind Lösungen dieser Gleichung, denn $z_k^n = (z_1^k)^n = (z_1^n)^k$ macht einfach k Umdrehungen auf dem Einheitskreis. Die Lösungen von $z^n = 1$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ sind in der folgenden Abbildung gezeigt.



Die Gleichung $z^1 = 1$ hat offensichtlich nur die eine Lösung $z_1 = 1$ (φ ein Vielfaches von 2π) hat, während $z^2 = 1$ die beiden bekannten Lösungen $z_1 = -1$ und $z_2 = 1$ (φ ein Vielfaches von π) hat. Etwas interessanter ist der Fall $n = 4$, für den $z^4 = 1$ die vier Lösungen $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$ und $z_4 = 1$ (φ ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$) hat. Wie man aus der Abbildung sieht, gibt es ab $n = 3$ komplexe Lösungen.

Der Fall $n = 3$ dürfte somit drei Lösungen haben, wobei φ ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{3}$ ist. Wegen $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ lassen sich die drei Lösungen sofort als $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $z_3 = 1$ angeben. Weil $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$ ist, lassen sich die beiden komplexen Lösungen auch als Nullstellen von $z^2 + z + 1$ bestimmen.



Die Gleichung $z^5 = 1$ für $n = 5$ hat die fünf Lösungen $z_{1,4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}i$, $z_{2,3} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}i$ und $z_5 = 1$. Weil $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ gilt, sind die vier komplexen und paarweise konjugiert komplexen Lösungen $z_{1,2,3,4}$ die Lösungen der Gleichung $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Betrachtet man noch den Fall $n = 8$ in der nebenstehenden Abbildung, so sind vier der Lösungen von $z^8 = 1$ die Lösungen von $z^4 = 1$. Die übrigen vier Lösungen sind $z_{1,3,5,7} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Somit muss $(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^2 = i$ geben, was sich mit der oben gefundenen Regel für die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen leicht überprüfen lässt.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass die Gleichung $z^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$ immer n Lösungen hat, von denen eine 1 ist. Ist eine der Lösungen die nicht-reelle komplexe Zahl z, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Lösung. Die Lösungen kann man durch Lösen der Gleichung zu finden versuchen, aber durch geometrische Überlegungen findet man sie einfacher.

Weil $1^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist 1 offensichtlich immer eine Lösung von $z^n = 1$. Schaut man jetzt die Gleichung $z^n = -1$ an, braucht man eine Fallunterscheidung, weil $(-1)^n = -1$ nur für ungerade Exponenten n gilt. Die Lösungen von $z^n = -1$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$ sind also die an der imaginären Achse gespiegelten Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Für gerade $n \in \mathbb{N}$ hingegen erhält man die Lösungen von $z^n = -1$ durch eine Drehung aus den Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, sodass die Lösungen von $z^n = -1$ in der Mitte zwischen den Lösungen von $z^n = 1$ liegen.

Die imaginäre Einheit i ist nicht als $i = \sqrt{-1}$, sondern als eine der Lösungen der Gleichung $z^2 = -1$ definiert, denn negative Zahlen in Wurzeln geben Probleme, wie die Rechnung

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

zeigt, die nicht stimmen kann. Für negative Zahlen a und b ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ nicht immer gleich $\sqrt{a \cdot b}$. Man muss also bei negativen Zahlen unter Wurzeln und damit auch bei gebrochenen Exponenten aufpassen.

4.3 Fundamentalsatz der Algebra

Hat eine quadratische Funktion $ax^2 + bx + c$ als Graphen eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel über der x-Achse, hat sie offensichtlich keine Nullstellen. Damit hat die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ keine reellen Lösungen. Das ist geometrisch einleuchtend. Sind aber komplexe Lösungen zugelassen, so hat diese Gleichung zwei konjugiert komplexe Lösungen, auch wenn das geometrisch nicht mehr so einfach zu interpretieren ist. Dafür hat jetzt algebraisch jedes Polynom zweiten Grades zwei Nullstellen. Auch die beiden Gleichungen $z^n = 1$ und $z^n = -1$, die man zu $z^n - 1 = 0$ und $z^n + 1 = 0$ umformen kann, haben je n Lösungen in $\mathbb{C}$. Das gilt nicht nur für diese einfachen Polynomfunktionen, sondern für alle Polynomfunktionen, wie der folgende Satz von Gauss, der seiner Bedeutung entsprechend auch *Fundamentalsatz der Algebra* heisst, belegt.

Eine *Polynomfunktion n-ten Grades* definiert auf $\mathbb{C}$ hat die Form

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Ist $P(z)$ eine Polynomfunktion n-ten Grades, so hat die Gleichung $P(z) = 0$ genau n Lösungen z_j in $\mathbb{C}$, die nicht alle verschieden sein müssen, und es gilt

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{j^1}^{n} (z - z_j)$$

sodass also jede Polynomfunktion n-ten Grades in n lineare Terme der Form $z - z_j$ faktorisiert werden kann. Gilt für sämtliche Koeffizienten zudem $a_k \in \mathbb{R}$, so sind immer zwei der komplexen Lösungen konjugiert komplex.

Sei $P(z)$ ein Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, und seien $z_{j_1} = a + bi$ und $z_{j_2} = a - bi$ zwei konjugiert komplexe Lösungen der Gleichung $P(z) = 0$. Die faktorisierte Form von $P(z)$ hat also die zwei Faktoren $z - z_{j_1}$ und $z - z_{j_2}$, die multipliziert $z^2 - 2az + a^2 + b^2$ ergeben. Das ist eine Polynomfunktion zweiten Grades mit reellen Koeffizienten. Daraus folgt, dass eine Polynomfunktion n-ten Grades mit reellen Koeffizienten innerhalb $\mathbb{R}$ immer in Terme faktorisiert werden kann, die Polynomfunktionen ersten oder zweiten Grades mit reellen Koeffizienten sind.

Beispiel:
Gegeben ist die Polynomfunktion $P(z) = z^5 + z^4 - z^3 - 5z^2 + 4z$ fünften Grades mit ausschliesslich reellen Koeffizienten. Sie hat offensichtlich die Nullstelle $z_1 = 0$, sodass man $P(z) = z(z^4 + z^3 - z^2 - 5z + 4)$ schreiben kann. Auch $z_2 = 1$ ist eine Nullstelle, womit man $P(z) = z(z-1)(z^3 + 2z^2 + z - 4)$ durch Polynomdivision bekommt. Weil $z_3 = 1$ wieder Nullstelle ist, bekommt man $P(z) = z(z-1)^2(z^2 + 3z + 4)$. Die Polynomfunktion $P(z)$ hat keine weiteren reellen Nullstellen mehr und kann somit innerhalb $\mathbb{R}$ nicht weiter faktorisiert werden. In $\mathbb{C}$ hat $P(z) = 0$ jedoch noch die beiden konjugiert komplexen Lösungen $z_{4,5} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$, sodass $P(z) = z(z-1)^2(z + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i)(z + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i)$ vollständig in fünf Polynomfunktionen ersten Grades faktorisiert werden kann.