Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

Rainer Hauser

Oktober 2010

1 Einleitung

1.1 Linearität

Funktionen und Gleichungen heissen *linear*, wenn – etwas salopp formuliert – in ihnen die Unbekannten weder im Quadrat noch mit einem anderen Exponenten ungleich 1 auftaucht, und wenn in ihnen auch keine anderen Unannehmlichkeiten wie Wurzeln oder Sinus vorkommen. Das lässt sich sauberer formulieren. Eine Funktion heisst linear, wenn sie durch Termumformungen in die Form $f(x) = m \cdot x + q$ mit $m, q \in \mathbb{R}$ gebracht werden kann. Eine Gleichung mit einer oder zwei Unbekannten heisst linear, wenn sie durch Term- und Äquivalenzumformungen in die Form $ax + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ beziehungsweise in die Form $ax + by + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ gebracht werden kann.

1.2 Term- und Äquivalenzumformungen

Eine Gleichung behauptet die Gleichheit von zwei Termen. Beide Terme dürfen umgeformt werden, wenn für die Umformungsschritte entweder eine Definition oder ein mathematisches Gesetz benutzt wird. Setzt man x^2 für $x \cdot x$, so benutzt man die Definition für das Quadrieren, und schreibt man $4(x - 3y)$ statt $4x - 12y$, so wendet man das Distributivgesetz an. Beide Beispiele sind gültige *Termumformungen*.

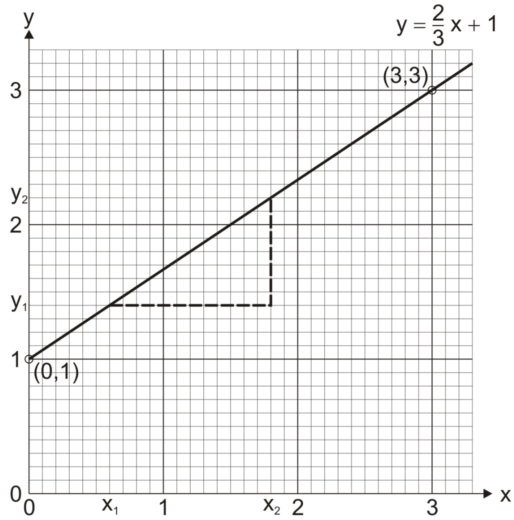
Bei Gleichungen darf man aber zusätzlich auf beiden Seiten die gleiche Operation anwenden. Speziell darf man auf beiden Seiten denselben Term hinzu- oder wegzählen, und man darf beide Seiten mit derselben Zahl ungleich 0 multiplizieren oder durch dieselbe Zahl ungleich 0 dividieren. Ersetzt man die Gleichung $5x - 3 = 2x + 5$ durch $5x - 3 - 2x = 2x + 5 - 2x$, so ist das also eine gültige *Äquivalenzumformung*.

1.3 Lineare Funktionen

Eine *lineare Funktion* ist eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der allgemeinen Form $x \mapsto m \cdot x + q$, bei der man die Grösse m als *Steigung* und die Grösse q als *y-Achsenabschnitt* bezeichnet. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Die y-Achse wird durch diese Gerade beim Wert q geschnitten. Weil eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, gilt auch für eine lineare Funktion, dass sie durch zwei beliebige Paare (x_1, y_1) und $x_2, y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ eindeutig bestimmt ist. Die Steigung lässt sich durch

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

berechnen. Im nebenstehenden Beispiel $x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$ lassen sich m und q beispielsweise durch die Punkte $(0, 1)$ und $(3, 3)$ auf dem Graphen eruieren.



2 Lineare Gleichungen

2.1 Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

Eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten hat die allgemeine Form $ax + b = 0$ mit den Koeffizienten a und b, wobei wir annehmen, dass a nicht 0 ist. Sie lässt sich durch Äquivalenzumformungen immer in

$$x = -\frac{b}{a}$$

umformen, sodass die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-\frac{b}{a}\}$ ist. Bei den Umformungsschritten schreibt man links die Gleichung und rechts das, was man macht.

Ausführliches Beispiel:

$5(3x - 5) + 2x = 7(3 - 2x) + 16$	Termumformung	Ausmultiplizieren links
$15x - 25 + 2x = 7(3 - 2x) + 16$	Termumformung	Ausmultiplizieren rechts
$15x - 25 + 2x = 21 - 14x + 16$	Termumformung	Addition $21 + 16$
$17x - 25 = 37 - 14x$	$+14x$	
$17x - 25 + 14x = 37 - 14x + 14x$	Termumformung	Subtraktion $14x - 14x$
$17x - 25 + 14x = 37$	Termumformung	Addition $17x + 14x$
$31x - 25 = 37$	$+25$	
$31x - 25 + 25 = 37 + 25$	Termumformung	Subtraktion $25 - 25$
$31x = 37 + 25$	Termumformung	Addition $37 + 25$
$31x = 62$	$\div 31$	
$\frac{31}{31}x = \frac{62}{31}$	Termumformung	Kürzen links
$x = \frac{62}{31}$	Termumformung	Kürzen rechts
$x = 2$	$\mathbb{L} = \{2\}$	

2.2 Lineare Gleichung mit zwei Unbekannten

Eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten hat die allgemeine Form $ax + by + c = 0$ mit den Koeffizienten a, b und c, wobei wir annehmen, dass a und b nicht beide 0 sind. Sie lässt sich durch Term- und Äquivalenzumformungen immer, in eine der beiden Formen

$$x = -\frac{by}{a} - \frac{c}{a} \qquad\qquad y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b} \tag{1}$$

bringen, je nachdem ob a oder b ungleich 0 ist.

2.3 Lineare Gleichung mit mehreren Unbekannten

Eine lineare Gleichung mit drei Unbekannten hat die allgemeine Form $ax + by + cz + d = 0$ mit den Koeffizienten a, b, c und d, wobei wir annehmen, dass a, b und c nicht alle drei gleich 0 sind. Für lineare Gleichungen mit n Unbekannten benutzt man für die Unbekannten lieber x_i und für die Koeffizienten a_i und b, sodass sie die allgemeine Form $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$ hat, wobei wir auch hier annehmen, dass mindestens einer der Koeffizienten a_i nicht 0 ist. Ist $a_i \neq 0$, kann man die lineare Gleichung in

$$x_i = -\frac{a_1x_1}{a_i} - ... - \frac{a_{i-1}x_{i-1}}{a_i} - \frac{a_{i+1}x_{i+1}}{a_i} - ... - \frac{a_nx_n}{a_i} \tag{2}$$

umformen.

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Allgemeine Überlegungen zur Lösbarkeit

Ein *Gleichungssystem* besteht aus mehreren Gleichungen, die gleichzeitig erfüllt sein müssen. Weil man in jeder Gleichung eines linearen Gleichungssystem gemäss (2) ein x_i auf die linke Seite bringen kann, sodass es auf der rechten Seite nicht mehr vorkommt, kann man diese Gleichung benutzen, um die Variable x_i in allen anderen Gleichungen durch die rechte Seite von (2) zu ersetzen. Damit hat man eine Gleichung und eine Variable weniger. Wiederholt man diesen Schritt jetzt für die verbleibenden Gleichungen, verliert man wieder eine Gleichung, wird aber dafür eine weitere Variable los. Bei n Unbekannten braucht man also n Gleichungen, damit am Schluss eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt, die man auf bekannte Weise lösen kann.

Das einzige Problem, das bei diesem Verfahren auftreten kann, ist, dass bei einem Schritt eine der entstehenden Gleichungen nur noch Koeffizienten $a_i = 0$ hat, sodass man das Verfahren irgendwann nicht mehr weiterführen kann. Diesen Fall wollen wir im weiter unten am Beispiel eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten näher betrachten.

3.2 Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Um ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zu lösen, brauchen wir wie oben gezeigt zwei Gleichungen. Wir schreiben dafür

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1 & = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 & = 0 \end{vmatrix}$$

und zeigen mit den beiden senkrechten Strichen an, dass die beiden Gleichungen zusammengehören und somit gleichzeitig erfüllt werden müssen. Es gibt verschiedene Lösungsmethoden, die unten beschrieben werden. Die folgende Methode führt immer zum Ziel, wenn auch nicht immer auf dem kürzesten Weg.

Wie oben gezeigt kann man jede dieser beiden Gleichung in eine der beiden Formen (1) bringen. Man kann also aus einer Gleichung x beziehungsweise y bestimmen und in die anderen Gleichung einsetzen. Sind die beiden Gleichungen $x+y-5=0$ und $x-y-1=0$ gegeben, so kann man die zweite Gleichung in $x = y+1$ umformen und in die ersten Gleichung einsetzen, sodass man die Gleichung $(y+1)+y-5=0$ bekommt, die man lösen kann. Das ergibt $y = 2$. Setzt man diesen Wert in $x = y+1$ ein, so erhält man $x = 3$ und damit die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(2,3)\}$. Mögliche Probleme zeigen geometrische Betrachtungen.

3.3 Geometrie der Gleichungen mit zwei Unbekannten

Eine einzelne Gleichung $ax+by+c=0$ mit zwei Unbekannten wie etwa $y-\frac{2}{3}x-1=0$ hat unendlich viele Lösungen. Eine Lösung besteht aus einem Zahlenpaar wie $(0,1)$ oder $(3,3)$. Ist der Koeffizient $b \neq 0$, so kann man die Gleichung in die Form $y = mx+q$ – also die Form einer linearen Funktion – bringen. (Die Gleichung $y-\frac{2}{3}x-1=0$ entspricht der linearen Funktion in der obigen Abbildung.) Der Graph einer solchen linearen Funktion ist eine Gerade. Somit ist auch die Lösungsmenge der entsprechenden linearen Gleichung eine Gerade. Gilt hingegen $b = 0$, so entspricht die Lösungsmenge der linearen Gleichung $ax+c=0$ der Geraden $x = -\frac{c}{a}$, die parallel zur y-Achse verläuft und keiner linearen Funktion entspricht.

Ein Gleichungssystem, das aus mehreren Gleichungen mit den zwei Unbekannten x und y besteht, entspricht also einem System von Geraden als Lösungsmengen dieser Gleichungen. Damit ein Zahlenpaar (x_0, y_0) mehr als eine dieser Gleichungen erfüllt, muss der Punkt (x_0, y_0) also auf beiden entsprechenden Geraden liegen. Die Lösung von zwei linearen Gleichungen lässt sich also geometrisch als Schnittpunkt der beiden entsprechenden Geraden bestimmen.

Zwei Geraden in der (x,y)-Ebene können sich entweder in einem Punkt schneiden, können zusammenfallen oder können parallel verlaufen. Die folgenden drei Gleichungssysteme entsprechen diesen drei Situationen:

$$\begin{vmatrix} x+y-5 & = 0 \\ x-y-1 & = 0 \end{vmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{3,2\}$, entspricht also zwei sich schneidenden Geraden.

$$\begin{vmatrix} x+y-5 & = 0 \\ 2x+2y-10 & = 0 \end{vmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{p, 5-p\}$ für $p \in \mathbb{R}$, entspricht also zwei zusammenfallenden Geraden.

$$\begin{vmatrix} x+y-5 & = 0 \\ 2x+2y-11 & = 0 \end{vmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \emptyset$, entspricht also zwei parallelen Geraden ohne gemeinsamen Punkt.

Versucht man das mittlere oder das rechte Gleichungssystem mit obiger Methode zu lösen, bekommt man beispielsweise $x = 5-y$ aus der ersten Gleichung, die in allen drei Gleichungssystemen dieselbe ist. Setzt man das in die zweite Gleichung ein, bekommt man entweder $0 = 0$ oder $-1 = 0$. Die eine Gleichung ist immer wahr, womit jedes Paar $(p, 5 - p)$ für einen beliebigen Wert $p \in \mathbb{R}$ das mittlere Gleichungssystem erfüllt, wie man leicht nachrechnet, während die andere Gleichung immer falsch ist, sodass keine Werte für x und y das rechte Gleichungssystem erfüllen können.

4 Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme

4.1 Textaufgaben

Bei Textaufgaben eignet sich manchmal eine Lösungsmethode besser als andere, weil die Gleichungen schon in einer dafür geeigneten Form entstehen, wie die folgenden Beispiele zeigen. Bei Textaufgaben lohnt es sich zudem, den Variablen sinnvolle Buchstaben zuzuweisen statt immer x und y zu wählen.

4.2 Einsetzungsmethode

Die oben beschriebene Methode, die immer zum Ziel führt, ist die *Einsetzungsmethode*. Man formt eine der Gleichungen so um, dass ihre linke Seite nur aus einer Variablen besteht, die rechts nicht mehr vorkommt. Die rechte Seite dieser Gleichung kann jetzt in den anderen Gleichungen überall dort eingesetzt werden, wo die Variable auf der linken Seite vorkommt.

Beispiel: *Zwei Türme*
In einer Stadt stehen zwei Türme mit verschiedenen Höhen. Der kleinere Turm misst fünf Sechstel des grösseren Turms. Wäre er 100 Meter weniger hoch, wäre er nur halb so hoch wie der grössere Turm. Wie hoch sind beide Türme?
Mit k und g als Höhen des kleineren beziehungsweise grösseren Turms in Meter lässt sich der zweite Satz der Aufgabenstellung als Gleichung $k = \frac{5}{6}g$ schreiben, und aus dem dritten Satz folgt $k - 100 = \frac{1}{2}g$. Weil die erste Gleichung schon in der Form ist, dass man k in der zweiten Gleichung einsetzen kann, eignet sich die Einsetzungsmethode besonders gut. (Lösung: $g = 300$ und $k = 250$.)

4.3 Gleichsetzungsmethode

Steht bei beiden Gleichungen derselbe Term auf der einen Seite, so müssen die beiden anderen Seiten ebenfalls gleich sein und dürfen somit gleichgesetzt werden.

Beispiel: *Schwarze und weisse Kugeln*
In einem Sack befinden sich schwarze und weisse Kugeln. Wären 21 weisse Kugeln weniger im Sack, gäbe es halb so viele schwarze wie weisse Kugeln. Wären aber 105 weisse Kugeln mehr im Sack, gäbe es einen Drittel so viele schwarze wie weisse Kugeln. Wie viele schwarze und weisse Kugeln sind im Sack?
Aus dem zweiten Satz der Aufgabenstellung folgt $s = \frac{1}{2}(w - 21)$ und aus dem dritten $s = \frac{1}{3}(w + 105)$. Aus der Gleichheit der linken Seiten folgt die Gleichheit $\frac{1}{2}(w - 21) = \frac{1}{3}(w + 105)$ der rechten. Die Gleichsetzungsmethode bietet sich hier unmittelbar an. (Lösung: $s = 126$ und $w = 273$.)

4.4 Additionsmethode

Gelten $term_1 = term_2$ und $term_3 = term_4$, so muss auch $term_1 + term_3 = term_2 + term_4$ gelten. Man darf also die linken und rechten Seiten von zwei Gleichungen addieren.

Beispiel: *Abstimmung*
Bei einer Abstimmung in einer Gemeinde sind (ohne leere Stimmen) 8508 gültige Stimmen eingegangen. Davon entfallen 1314 Stimmen mehr auf Ja als auf Nein. Wie viele Ja- und Nein-Stimmen sind insgesamt eingegangen?
Der erste Satz der Aufgabenstellung besagt $j + n = 8508$ und der zweite $j - n = 1314$. Addiert man die beiden Gleichungen, so bekommt man $j + n + j - n = 8508 + 1314$, womit die Variable n verschwindet. Die Additionsmethode führt hier also besonders schnell zum Ziel. (Lösung: $j = 4911$ und $n = 3597$.)