Quadratische Funktionen

Rainer Hauser

April 2011

1 Einleitung

1.1 Familien von Funktionen

Funktionen gruppiert man durch Parameter in Familien. Die linearen Funktionen zum Beispiel haben die Form $f(x) = ax + b$ und die harmonischen Schwingungen (basierend auf den trigonometrischen Funktionen) haben die Form $f(x) = a\sin(bx + c)$. Die Familie der *quadratischen Funktionen* lässt sich mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ durch die Parameter a, b und c angeben, wobei angenommen wird, dass $a \neq 0$ ist, weil aus der quadratischen Funktion sonst eine lineare Funktion wird.

1.2 Bestimmung des Graphen einer Funktion

Versucht man den Graphen einer Funktion ohne Hilfe eines graphikfähigen Taschenrechners zu skizzieren, bestimmt man die Werte der Funktion an einzelnen Stellen. Besonders nützlich sind dabei einerseits die *Nullstellen*, an denen der Graph die x-Achse schneidet, und andererseits die *Maxima* und *Minima*, an denen der Graph lokal maximale und minimale Werte annimmt.

Lineare Funktionen der Form $f(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ haben genau eine Nullstelle. Weil der Graph eine Gerade ist, die durch zwei Punkte bestimmt ist, braucht man nur noch einen zweiten Punkt, um den Graphen vollständig zu bestimmen. Lineare Funktionen mit $a \neq 0$ haben keine Maxima und Minima.

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sowie folglich auch die harmonischen Schwingungen sind periodische Funktionen und haben unendlich viele Nullstellen, die immer den gleichen Abstand voneinander haben. Auch die Maxima und Minima haben immer den gleichen Abstand voneinander und liegen jeweils genau in der Mitte zwischen zwei Nullstellen.

2 Eigenschaften der quadratischen Funktionen

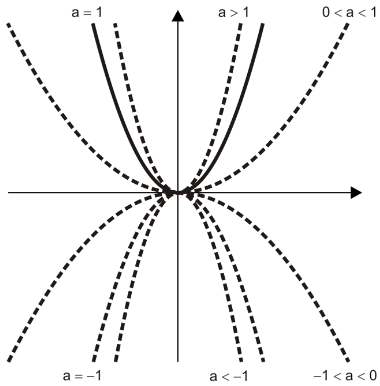
2.1 Unterfamilien der quadratischen Funktionen

Die allgemeine quadratische Funktion hat die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, wobei ax^2 quadratisches Glied, bx lineares Glied und c absolutes Glied genannt wird. Indem man erst Unterfamilien der quadratischen Funktionen studiert, bei denen das lineare und/oder das absolute Glied verschwindet, lässt sich die Familie der quadratischen Funktionen schrittweise untersuchen.

2.2 Die reinquadratischen Funktionen

Die einfachste quadratische Funktion ist die Quadratfunktion $f(x) = x^2$, dessen Graph durch den Nullpunkt des Koordinatensystems $(0, 0)$ und den Punkt $(1, 1)$ geht, und der spiegelsymmetrisch zur y-Achse ist. Der Graph heisst *Parabel*, und der Punkt mit dem Minimum, der im Nullpunkt liegt, heisst *Scheitel*. Weil die Funktionswerte für wachsende $|x|$ beliebig gross werden können, ist die Parabel auf beiden Seiten der y-Achse nach oben unbeschränkt.

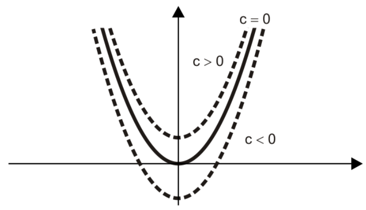
Variiert man bei $f(x) = ax^2$ den Parameter a, so entstehen Graphen wie in der nebenstehenden Abbildung. Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet. Ist $a < 0$, so ist die Parabel nach unten geöffnet. Je kleiner $|a|$ ist, umso breiter wird die Parabel. Die Graphen für $a \neq 1$ sind durch unterbrochene Linien, derjenige für $a = 1$ durch eine ausgezogene Linie gekennzeichnet.



Die Unterfamilie der quadratischen Funktionen von der Form $f(x) = ax^2$ hat also Parabeln als Graphen, die entweder nach oben oder nach unten geöffnet sind, die alle durch den Nullpunkt gehen, und die spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse sind. Der Scheitel liegt also bei all diesen Funktionen im Nullpunkt, ist die einzige Nullstelle und ist ein Minimum oder ein Maximum.

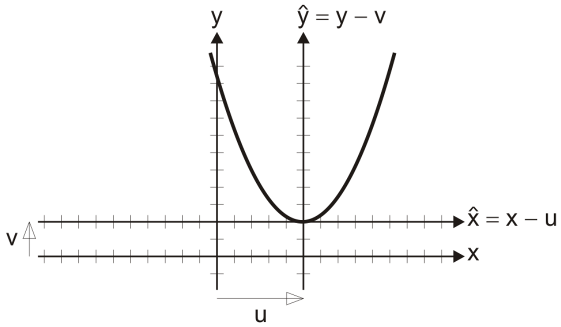
2.3 Die geraden quadratischen Funktionen

Variiert man bei $f(x) = ax^2 + c$ den Parameter c, so bewegt sich der Graph, der auch wieder eine Parabel ist, für $c > 0$ nach oben und für $c < 0$ nach unten. Weil auch diese Unterfamilie nur aus geraden Funktionen besteht, ist der Graph ebenfalls spiegelsymmetrisch zur y-Achse, und der Scheitel liegt weiterhin bei $x = 0$. Ist $c < 0$, hat die Funktion zwei Nullstellen, ist $c = 0$, hat sie eine Nullstelle, und ist $c > 0$, hat sie keine Nullstelle.



2.4 Die allgemeinen quadratischen Funktionen

Die Graphen der allgemeinen quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ liegen für $b \neq 0$ nicht mehr spiegelsymmetrisch zur y-Achse.



Durch quadratisches Ergänzen kann man jede quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$ in die Form $y - v = a(x - u)^2$ bringen.
Beispiel: Die Funktion $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{29}{2}$ kann in die Form $y - 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 25) = \frac{1}{2}(x - 5)^2$ gebracht werden.
Mit der Verschiebung $\hat{x} = x - u$ und $\hat{y} = y - v$ wird daraus eine reinquadratische Funktion. Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion ist also auch eine Parabel mit dem Scheitel bei (u, v).

3 Extremwertaufgaben

3.1 Bestimmung der Scheitelkoordinaten

Durch quadratisches Ergänzen kann man die Koordinaten des Scheitels bestimmen. Es gibt aber eine einfachere Methode, die auf den folgenden vier Beobachtungen basiert:

- Wenn man die x-Koordinaten des Scheitels kennt, kann man durch Einsetzen in die Funktion die y-Koordinaten berechnen.
- Ändert man den Parameter c, so verschiebt sich zwar der Scheitel vertikal und ändert damit seine y-Koordinate, seine x-Koordinate bleibt aber gleich.
- Setzt man $c = 0$, so geht die Parabel durch den Nullpunkt des Koordinatensystems, sodass $x = 0$ eine Nullstelle ist.
- Wenn eine quadratische Funktion zwei Nullstellen hat, so liegt die x-Koordinate des Scheitels in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.

Setzt man $c = 0$, so hat die entstehende Funktion $f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b)$ die beiden Nullstellen $x = 0$ und $x = -\frac{b}{a}$. Die Mitte dazwischen und damit die x-Koordinate des Scheitels ist $-\frac{b}{2a}$. (Hat die Funktion zwei Nullstellen x_1 und x_2, so ist $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, und die Mitte dazwischen ist offensichtlich $\frac{-b}{2a}$, was zum selben Resultat führt.) Damit sind

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad\qquad y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \tag{1}$$

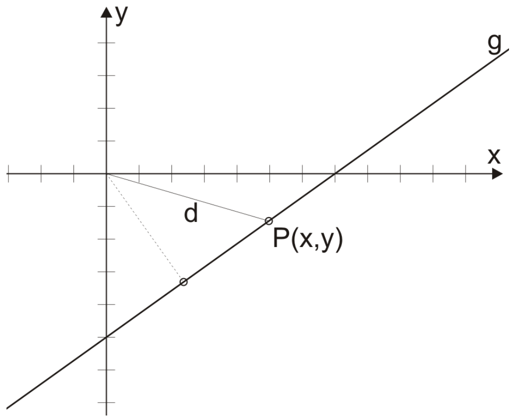
die Koordinaten des Scheitels von $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3.2 Bestimmung des Maximums oder Minimums

Weil das Maximum oder Minimum des Graphen einer quadratischen Funktion mit dem Scheitel zusammenfällt, lassen sich gewisse Extremwertaufgaben lösen, indem man die Koordinaten des Scheitels bestimmt. Oft genügt es dabei schon, die x-Koordinate zu finden.

Aufgabe:

Bewegt man den Punkt P mit den Koordinaten (x, y) in der nebenstehenden Abbildung auf der Geraden g, so ändert sich der Abstand d vom Nullpunkt des Koordinatensystems. Kommt der Punkt von rechts, wird sein Abstand immer kleiner bis zu einem gewissen Punkt und nimmt dann wieder zu. Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes, der den kürzesten Abstand vom Nullpunkt hat. (Hinweis: Die Gerade g schneidet die x-Achse im Punkt $(7, 0)$ und die y-Achse im Punkt $(0, -5)$. Daraus lässt sich die lineare Funktion bestimmen, deren Graph die Gerade g ist.)



Lösung in vier Schritten:

Schritt 1: Lineare Funktion bestimmen mit dem Ansatz $y = ax + b$ und den beiden bekannten Punkten:
Setzt man die gegebenen Punkte ein, so folgt aus $(0, -5)$ die Gleichung $-5 = 0a + b \Rightarrow b = -5$ und aus $(7, 0)$ die Gleichung $0 = 7a - 5 \Rightarrow a = \frac{5}{7}$. Somit ist die lineare Funktion $y = \frac{5}{7}x - 5$.

Schritt 2: Distanz d als Funktion von x und y bestimmen:
Aus dem Satz von Pythagoras folgt $d^2 = x^2 + y^2$. Weil d genau dann minimal ist, wenn d^2 minimal ist, braucht man die Wurzel nicht zu ziehen.

Schritt 3: Eine der Unbekannten x und y mit der gefundenen linearen Funktion für g eliminieren:
Mit $y = \frac{5}{7}x - 5$ gilt $d^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (\frac{5}{7}x - 5)^2 = x^2 + \frac{25}{49}x^2 - \frac{50}{7}x + 25 = \frac{74}{49}x^2 - \frac{50}{7}x + 25$.

Schritt 4: Koordinaten des Minimums mit (1) bestimmen:
Die x-Koordinate $\underline{x = \frac{175}{74}}$ ergibt sich aus $-\frac{b}{2a}$ und die y-Koordinate $\underline{y = -\frac{245}{74}}$ aus $y = \frac{5}{7}x - 5$.

Der Punkt P auf der Geraden g mit dem kleinsten Abstand vom Nullpunkt des Koordinatensystems hat also die Koordinaten $\underline{\left(\frac{175}{74}, -\frac{245}{74}\right)}$.

4 Gleichungen und Ungleichungen

4.1 Quadratische Gleichungen

Quadratische Funktionen führen zu quadratischen Gleichungen. Will man etwa die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ finden, muss man die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lösen. Diese Gleichung hat höchstens die zwei Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

wie bereits oben benutzt. Die *Diskriminante* $D = b^2 - 4ac$ bestimmt, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung hat. Ist $D > 0$, so gibt es zwei Lösungen. Ist $D = 0$ fallen die beiden Lösungen zusammen, und es gibt nur eine Lösung. Ist $D < 0$, so gibt es keine reelle Lösung.

4.2 Weitere lösbare Gleichungen

Gleichungen höherer Ordnung oder Wurzelgleichungen lassen sich manchmal durch Umformen, Faktorisieren oder Substitution in lösbare quadratische Gleichungen zurückführen. Das soll im Folgenden an ein paar Beispielen demonstriert werden.

Beispiel 1:
Die Gleichung $x - 9 = -\frac{18}{x}$ kann durch Multiplikation mit x in $x^2 - 9x + 18 = 0$ umgeformt werden. Sie hat die Lösungen $\mathbb{L} = \{3, 6\}$, die man wie üblich mit der Lösungsformel (2) finden kann.

Beispiel 2:
Die Gleichung $x^3 - 9x = 0$ ist zwar kubisch, kann aber durch Ausklammern von x in die faktorisierte Form $x(x^2 - 9) = 0$ mit den Lösungen $\mathbb{L} = \{-3, 0, 3\}$ umgewandelt werden, denn $a \cdot b = 0$ kann nur gelten, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ gilt.

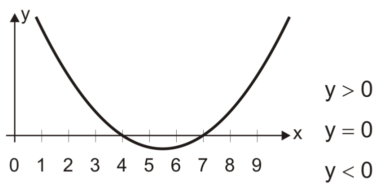
Beispiel 3:
Die Gleichung $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ kann durch die Substitution $u = x^2$ in die Form $u^2 - 5u + 4 = 0$ gebracht und gelöst werden. Aus den zwei Lösungen $u = 1$ und $u = 4$ folgt $\mathbb{L} = \{-2, -1, 1, 2\}$.

Beispiel 4:
Die Gleichung $x - 4\sqrt{x} - 5 = 0$ kann durch die Substitution $u = \sqrt{x}$ in $u^2 - 4u - 5 = 0$ umgewandelt werden. Von den zwei Lösungen $u = -1$ und $u = 5$ führt nur die zweite zu einer Lösung für x, weil $\sqrt{x}$ nicht negativ sein darf. Damit hat die ursprüngliche Gleichung nur die Lösung $\mathbb{L} = \{25\}$.

4.3 Quadratische Ungleichungen

Um die Lösungsmenge einer quadratischen Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ zu finden, bestimmt man die Nullstellen der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, weil $f(x)$ nur dort das Vorzeichen wechseln kann. Hat diese Funktion die zwei Nullstellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$, so braucht man nur die drei Mengen $\mathbb{M}_1 = \{x|x < x_1\}$, $\mathbb{M}_2 = \{x|x > x_1 \text{ und } x < x_2\}$ und $\mathbb{M}_3 = \{x|x > x_2\}$ zu untersuchen.

Beispiel: $x^2 - 11x + 28 > 0$
Die Funktion $f(x) = x^2 - 11x + 28$ hat die beiden Nullstellen $x_1 = 4$ und $x_2 = 7$. Ihr Graph schneidet die x-Achse in den Punkten mit den Koordinaten $(4, 0)$ und $(7, 0)$.



Für Werte von x in den Intervallen $(-\infty, 4)$ und $(7, +\infty)$ ist $f(x) > 0$. Für Werte von x im Intervall $(4, 7)$ ist $f(x) < 0$. Für die zwei Werte $x = 4$ und $x = 7$ ist $f(x) = 0$.

Für die verschiedenen Gleichungen und Ungleichungen gibt es folgende Möglichkeiten:

$x^2 - 11x + 28 < 0$	$\Rightarrow$	$\mathbb{L} = \{x\|x > 4 \text{ und } x < 7\}$	Intervall zwischen den Nullstellen
$x^2 - 11x + 28 = 0$	$\Rightarrow$	$\mathbb{L} = \{x\|x = 4 \text{ oder } x = 7\}$	Die beiden Nullstellen
$x^2 - 11x + 28 > 0$	$\Rightarrow$	$\mathbb{L} = \{x\|x < 4 \text{ oder } x > 7\}$	Links und rechts der beiden Nullstellen
$x^2 - 11x + 28 \leq 0$	$\Rightarrow$	$\mathbb{L} = \{x\|x \geq 4 \text{ und } x \leq 7\}$	$x^2 - 11x + 28 < 0$ oder $x^2 - 11x + 28 = 0$
$x^2 - 11x + 28 \geq 0$	$\Rightarrow$	$\mathbb{L} = \{x\|x \leq 4 \text{ oder } x \geq 7\}$	$x^2 - 11x + 28 > 0$ oder $x^2 - 11x + 28 = 0$

Ist eine quadratische Ungleichung gegeben, bestimmt man erst die Nullstellen der entsprechenden Funktion. Hat diese keine Nullstellen, so befindet sich der ganze Graph auf derselben Seite der x-Achse. Hat sie nur eine Nullstelle, so liegt ebenfalls der ganze Graph auf derselben Seite der x-Achse, berührt diese aber im Scheitel. Hat sie zwei Nullstellen, so liegt der Graph für x-Werte zwischen den beiden Nullstellen auf der einen Seite der x-Achse und der Rest des Graphen auf der anderen Seite. Damit genügt es in allen drei Fällen, für einen Punkt des Graphen zu bestimmen, ob er oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt.