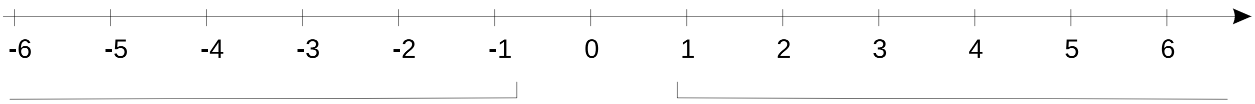
Ganze Zahlen

Die ganzen Zahlen bestehen aus den negativen und positiven ganzen Zahlen sowie der Null:

Die Zahlengerade:



negative ganze Zahlen $\mathbb{Z}^-$ positive ganze Zahlen $\mathbb{Z}^+$

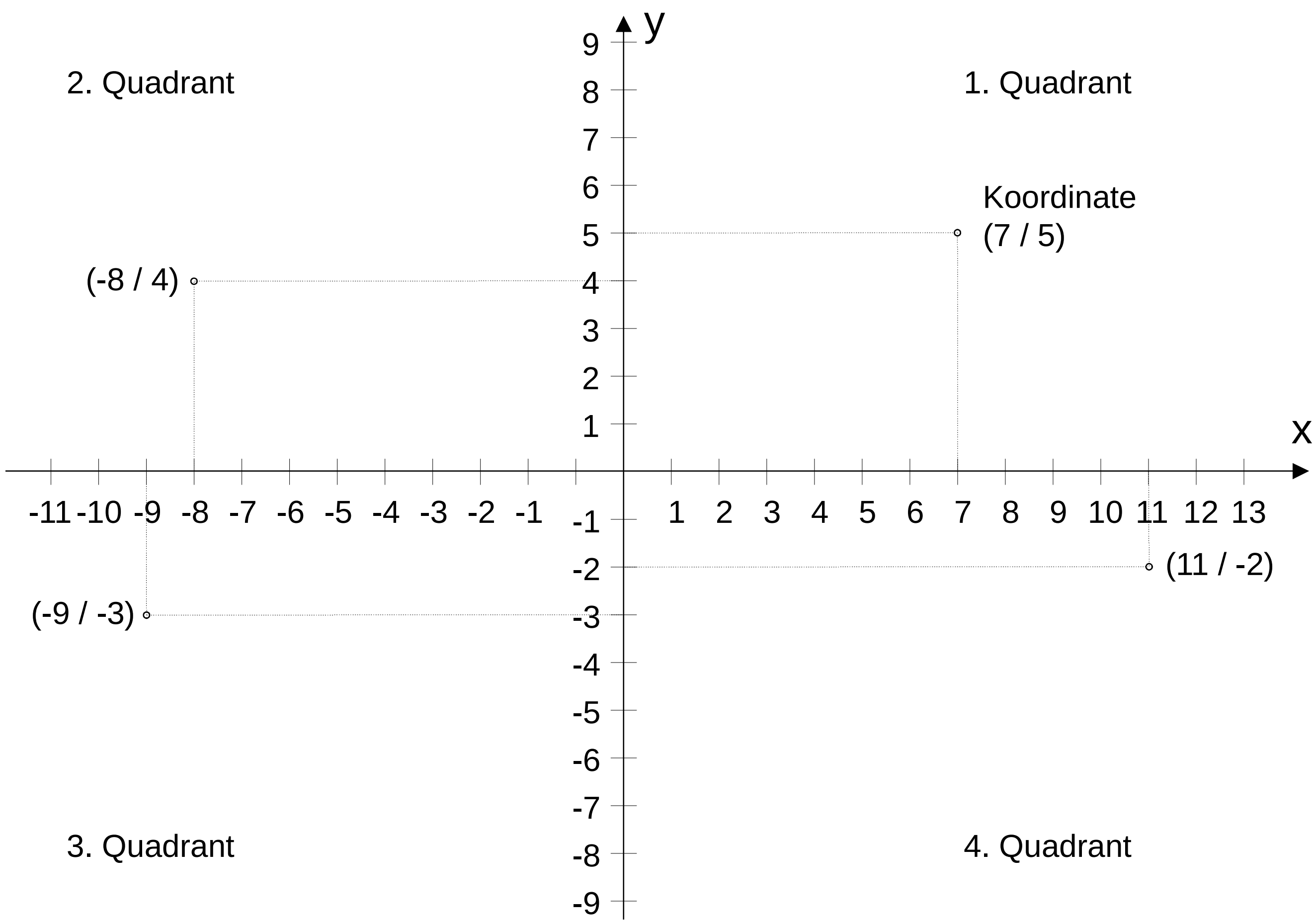
$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Ordnung: Liegt n_1 auf der Zahlengerade links von n_2, so gilt: $n_1 < n_2$

Die <u>Gegenzahl</u> einer ganzen Zahl ist die ganze Zahl, die gleich weit von 0 entfernt aber auf der anderen Seite von 0 liegt.
Beispiel:
-13 ist die Gegenzahl von 13
25 ist die Gegenzahl von -25

Das rechtwinklige Koordinatensystem:



Operationen auf den ganze Zahlen

Die Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen hängen zusammen:
Eine ganze Zahl wird subtrahiert, indem man ihre Gegenzahl addiert.

$$a - b = a + (-b)$$

Beispiele:
$9 - 3 = 9 + (-3) = 6$
$3 - 9 = 3 + (-9) = -6$
$(-3) - (-4) = (-3) + 4 = 4 + (-3) = 4 - 3 = 1$

Für die Multiplikation und Division gilt die Faustregel:
Ignoriere das Vorzeichen und zähle am Schluss die Vorzeichen zusammen. Ist die Anzahl gerade, so ist das Resultat positiv, ist sie jedoch ungerade, so ist das Resultat negativ, denn:

$$-a = (-1) \cdot a$$
$$(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b$$
$$1 \cdot 1 = 1;\ (-1) \cdot 1 = -1;\ 1 \cdot (-1) = -1;\ (-1) \cdot (-1) = 1$$

Beispiele:
$10 \cdot (-5) = -50$
$(-2) \cdot (-3) = 6$
$(-100) : (-4) = ((-1) \cdot 100) : ((-1) \cdot 4) = 25$

Kürzen

$$\frac{(-1) \cdot 100}{(-1) \cdot 4} = \frac{100}{4}$$

-40	-35	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30
-32	-28	-24	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20	24
-24	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18
-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
16	14	12	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12
24	21	18	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	-18
32	28	24	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20	-24

Terme

<u>Definition:</u> Alle Rechenausdrücke sind <u>Terme</u>. Zahlen und Variablen sind einfache Terme, und Ausdrücke wie (x + 2) oder ((-15) : 3) sind zusammengesetzte Terme.

Beispiele:
Einfache Terme: 1, x, (-10), 0, 123
Zusammengesetzte Terme: 5 + 1, (33 : 11), 5 · 3, (-5) · 9, x - 3

Zusammensetzungsregeln:
Wenn T_1 und T_2 Terme sind, so sind auch
1. $T_1 + T_2$
2. $T_1 - T_2$
3. $T_1 \cdot T_2$
4. $T_1 : T_2$

Terme.

Beispiel:
Ist T_1 der Term (5 + (42 : 6)) und T_2 der Term (x - 1), so kann man die beiden Terme zu den folgenden Termen zusammensetzen:

$$(5 + (42 : 6)) + (x - 1)$$
$$(5 + (42 : 6)) - (x - 1)$$
$$(5 + (42 : 6)) \cdot (x - 1)$$
$$(5 + (42 : 6)) : (x - 1)$$

Um den Rechenausdruck, der durch einen Term dargestellt ist, eindeutig zu machen, kann man Terme auch in Klammern setzen.

Beispiel:
Wenn man x + 1 als T_1 und y - 1 als T_2 ohne Klammern zu einem Produkt zusammenfassen würde, so wäre das Ergebnis x + 1 · y - 1 nicht eindeutig, und man schreibt deshalb (x + 1) · (y - 1).

<u>Konvention</u>: Wenn keine Klammern gesetzt worden sind, so führt man Multiplikation und Division vor Addition und Subtraktion durch (Punkt vor Strich).

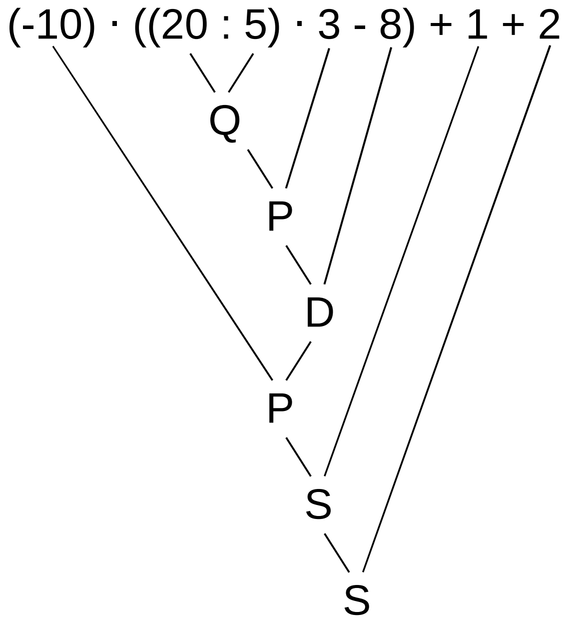
Beispiel:
Den Term 2 · 3 + 4 · 5 liest man als (2 · 3) + (4 · 5), während man den Term 2 + 3 · 4 + 5 als 2 + (3 · 4) + 5 liest.

Strukturbäume

Die Reihenfolge, in der Terme aus anderen Termen aufgebaut werden, widerspiegelt auch die Reihenfolge, in der zusammengesetzte Terme aufgelöst (also ausgerechnet) werden.

Eine Rechnung wie die folgende wird Term um Term von innen ausgerechnet, wobei die folgenden Prioritäten bei der Auflösung gelten:
1. Klammern
2. Punkt vor Strich
3. von links nach rechts

Dies kann durch einen Strukturbaum dargestellt werden:



S = Summe (Addition)
D = Differenz (Subtraktion)
P = Produkt (Multiplikation)
Q = Quotient (Division)

Das Beispiel wird somit wie folgt berechnet:

(-10) · ((20 : 5) · 3 - 8) + 1 + 2	(20 : 5) = 4 (Klammern)
(-10) · (4 · 3 - 8) + 1 + 2	4 · 3 = 12 (Punkt vor Strich)
(-10) · (12 - 8) + 1 + 2	(12 - 8) = 4 (Klammern)
(-10) · 4 + 1 + 2	(-10) · 4 = (-40) (Punkt vor Strich)
(-40) + 1 + 2	(-40) + 1 = (-39) (von links nach rechts)
(-39) + 2	(-39) + 2 = (-37)
(-37)	Resultat