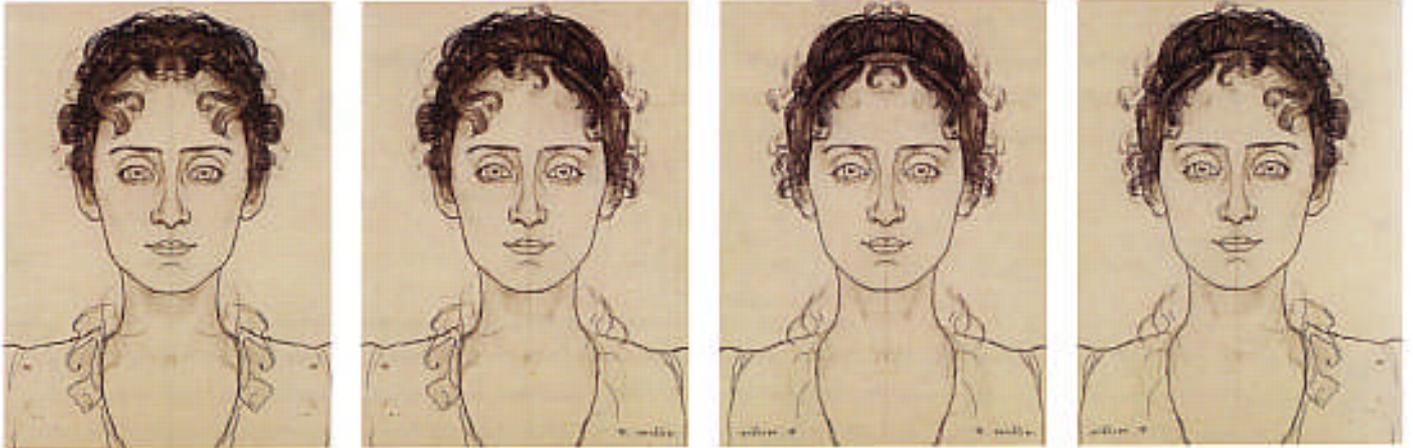


Symmetrien



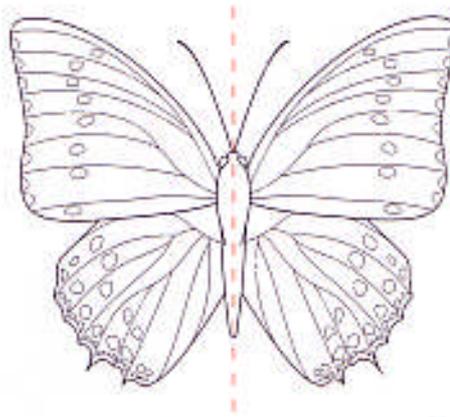
Ist ein Gesicht symmetrisch?

Welches ist das von Ferdinand Hodler gezeichnete Originalbild seiner Frau Berthe? Weshalb?

Verschiedene Arten von Symmetrie

Sind Schmetterling und Propeller gleich symmetrisch?

Wie konstruiert man die andere Hälfte des Schmetterlings und des Propellers, wenn man nur eine Hälfte hat?



Was unterscheidet die beiden Karten?
Welche ist richtig?
Was passiert, wenn man sie um 180° dreht?

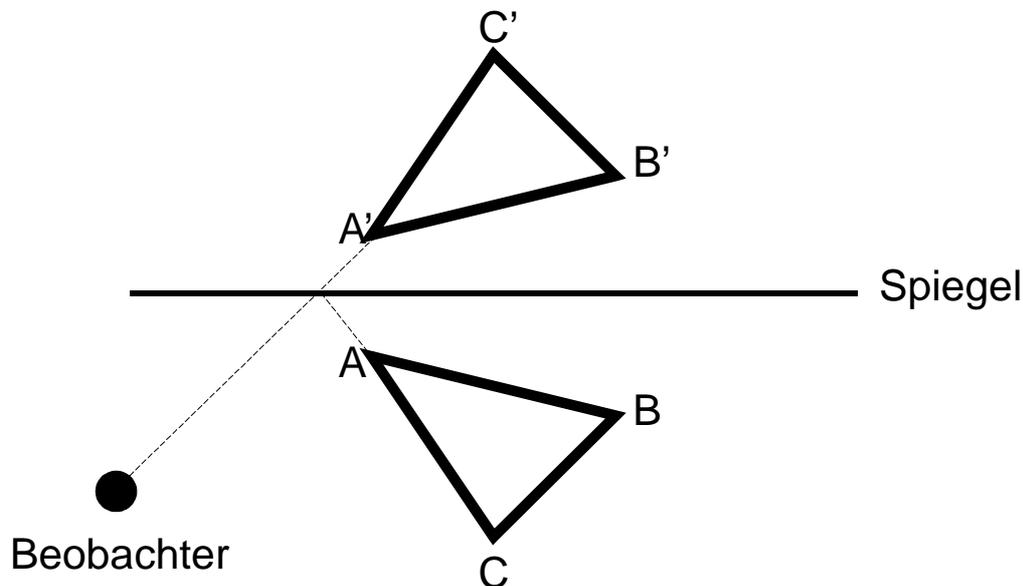


Achsensymmetrie Punktsymmetrie

Quelle: Bildmaterial aus mathbu.ch, 7. Schuljahr, Seite 54-55.

Achsensymmetrie - Geradenspiegelung

Wie funktioniert ein Spiegel? Vertauscht der Spiegel rechts und links?

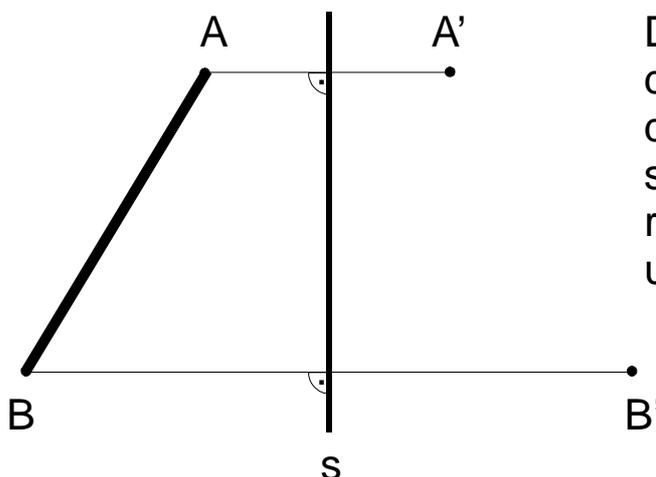


Das Licht, das von A ausgeht, wird gespiegelt. Weil das Auge des Beobachters jedoch glaubt, das Licht nehme einen geraden Weg, sieht es den Punkt A als A' hinter dem Spiegel.

Der Spiegel vertauscht also nicht rechts und links, sondern vorne und hinten. Während die Ecken im Dreieck ABC im Uhrzeigersinn beschriftet sind, sind sie im Dreieck A'B'C' im Gegenuhrzeigersinn beschriftet.

Definition: Die Spiegelung an einer Geraden heisst Achsensymmetrie, und die Gerade s, an der gespiegelt wird, heisst Symmetrieachse.

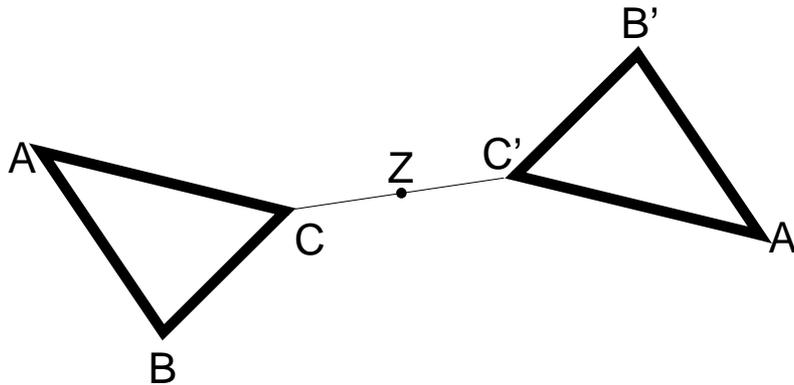
Konstruktion des achsensymmetrischen Bildes:



Die Strecke AA' (und somit auch die Strecke BB'), also die Verbindung zwischen einem Punkt und seinem Spiegelbild, steht senkrecht auf der Symmetrieachse s und wird von dieser halbiert.

Punktsymmetrie - Punktspiegelung

Wird bei der Punktspiegelung auch links und rechts vertauscht?

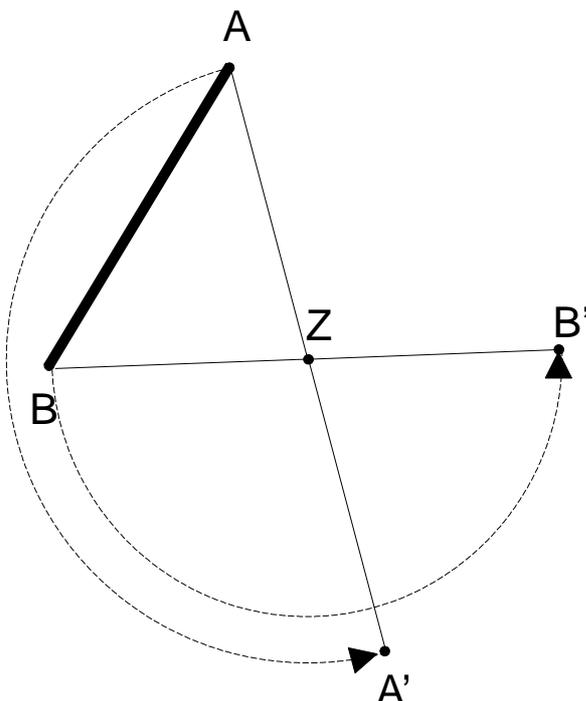


Die Spiegelung am Punkt Z entspricht einer Drehung um 180° um das Zentrum Z.

Bei der Punktspiegelung wird weder rechts und links noch vorne und hinten vertauscht. Die Dreiecke ABC und A'B'C' sind beide im Gegenuhrzeigersinn beschriftet.

Definition: Die Spiegelung an einem Punkt heisst Punktsymmetrie, und den Punkt Z, an dem gespiegelt wird, bezeichnet man als Symmetriezentrum.

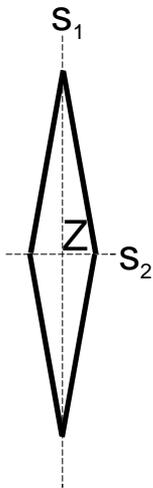
Konstruktion des punktsymmetrischen Bildes:



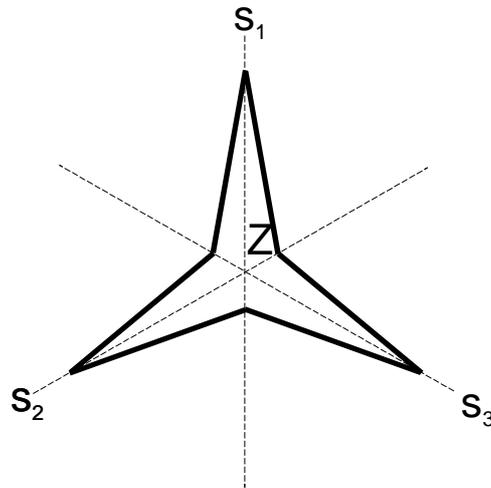
Die Strecke AA' (und somit auch die Strecke BB'), also die Verbindung zwischen einem Punkt und seinem Bild, geht durch das Symmetriezentrum Z und wird von diesem halbiert.

Drehsymmetrie - Drehungen

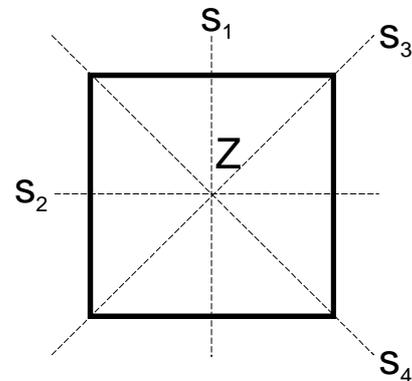
Achsensymmetrische Figuren mit mehr als einer Symmetrieachse:



Figur 1



Figur 2



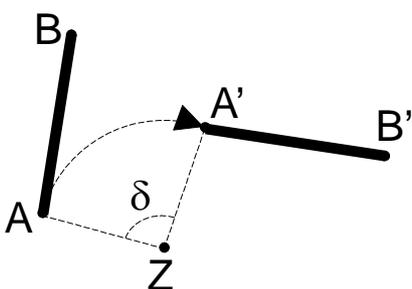
Figur 3

Die Figuren 1 und 3 sind zudem punktsymmetrisch und lassen sich also durch eine Drehung um 180° um Z (dem Schnittpunkt der Symmetrieachsen) in sich selber überführen. Die Figur 2 ist zwar nicht punktsymmetrisch, lässt sich jedoch durch Drehung um 120° in sich selber überführen. Die Figur 3 lässt sich nicht nur durch Drehung um 180° , sondern auch um 90° in sich selber überführen.

Definition: Die Symmetrie, die aus einer Drehung um einen Punkt Z resultiert, heisst Drehsymmetrie, und den Punkt Z, um den gedreht wird, bezeichnet man als Drehpunkt, als Drehzentrum oder einfach als Zentrum.

Die Punktsymmetrie ist ein Spezialfall der Drehsymmetrie. Der allgemeine Ausdruck Spiegelung wird für die Geradenspiegelung benutzt.

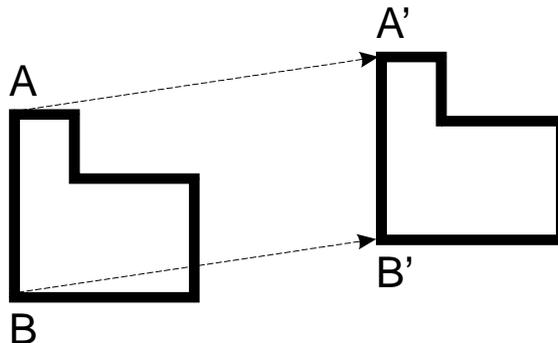
Konstruktion des drehsymmetrischen Bildes:



Die Strecken vom Drehzentrum Z zu einem Punkt der ursprünglichen Figur beziehungsweise zu dessen Bild (also beispielsweise die Strecken AZ und A'Z) sind gleich lang, und die Winkel zwischen diesen Strecken bei Z (also beispielsweise die Winkel AZA' und BZB') sind alle gleich.

Schubsymmetrie - Verschiebung

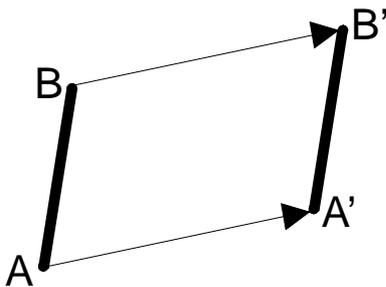
Diese beiden Figuren lassen sich weder durch Drehung noch durch Spiegelung in einander überführen:



Die eine Figur entsteht aus der anderen durch Verschiebung. Der Punkt B der Figur links liegt in der gleichen Richtung und im gleichen Abstand vom Punkt B' der Figur rechts wie der Punkt A der linken Figur vom Punkt A' der rechten Figur.

Definition: Die Symmetrie, die aus der Verschiebung in einer Richtung um eine Strecke resultiert, heisst Schubsymmetrie, und die Richtung und Strecke zusammen nennt man Verschiebungsvektor.

Konstruktion des schubsymmetrischen Bildes:



Alle Strecken von einem Punkt der ursprünglichen Figur zu dessen Bild (also beispielsweise die Strecken AA' und BB') sind parallel und gleich lang.

Bemerkung: Es gibt geometrische Figuren, die sich durch Spiegelung oder Drehung in sich selber überführen lassen. Es gibt aber keine endlichen geometrischen Figuren, die sich durch Verschiebung in sich selber überführen lassen.

Verschiebung, Drehung und Spiegelung

Drehung

VERSCHIEBUNG

Spiegelung

Kongruenz-Abbildungen

Definition: Eine Abbildung ist eine Vorschrift, die jedem Punkt P einer Figur eindeutig einen Bildpunkt P' einer Bildfigur zuordnet.

Definition: Die Verschiebung, die Drehung und die Spiegelung sowie Kombinationen davon werden Kongruenz-Abbildungen genannt. Zwei Figuren heissen kongruent, wenn sich die eine durch beliebiges Anwenden der Kongruenz-Abbildungen in die andere überführen lässt.

Die Kongruenz-Abbildungen bilden

- Geraden auf Geraden
- Kreise auf Kreise mit gleichem Radius
- Strecken auf Strecken mit gleicher Länge
- Winkel auf gleich grosse Winkel

ab.

Bei der Drehung und der Verschiebung bleibt die Orientierung erhalten, während sie sich bei der Spiegelung ändert. Ein Dreieck ABC , dessen Ecken im Gegenuhrzeigersinn beschrifteten sind, geht somit bei einer Verschiebung oder Drehung in ein Dreieck $A'B'C'$ über, dessen Ecken ebenfalls im Gegenuhrzeigersinn beschriftet sind, während es bei einer Spiegelung in ein Dreieck $A'B'C'$ übergeht, dessen Ecken im Uhrzeigersinn beschriftet sind.