Potenzen

1. Stufe: Addition
$3 + 7 = 7 + 3$ (Kommutativgesetz der Addition)
$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21 = 7 \cdot 3 \Rightarrow$ Vereinfachung

2. Stufe: Multiplikation
$7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$ (Kommutativgesetz der Multiplikation)
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2187 = 3^7 \Rightarrow$ Vereinfachung

3. Stufe: Potenzen
$3^7 \neq 7^3$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren a}} = a^n$$

Exponent: n, Basis: a — n-te Potenz von a ("a hoch n")

Beispiele:

Natürliche Zahl als Basis: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Negative Zahl als Basis: $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Rationale Zahl als Basis: $(\frac{4}{5})^3 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$

Dezimalzahl als Basis: $0.7^3 = 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 = 0.343$

Rechengesetze:	Beispiele:
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^5 \cdot 3^5 = 6^5$
$a^n \div a^m = a^{n-m}$ (für $n \geq m$)	$2^5 \div 2^3 = 2^2$
$a^n \div b^n = (a \div b)^n = (\frac{a^n}{b^n}) = (\frac{a}{b})^n$	$12^3 \div 4^3 = 3^3$

Anwendungen auf Bruchterme

Beispiele:

$$(-\frac{5x^2y}{2z})^3 = (-\frac{5x^2y}{2z})(-\frac{5x^2y}{2z})(-\frac{5x^2y}{2z}) = -\frac{125x^6y^3}{8z^3}$$

$$(\frac{3a-4b}{2(a+b)z})^2 = \frac{3a-4b}{2(a+b)z} \cdot \frac{3a-4b}{2(a+b)z} = \frac{(3a-4b)^2}{4(a+b)^2z^2}$$

Quadratwurzeln

Die <u>Quadratwurzel</u> (zweite Wurzel oder einfach Wurzel) von a ist diejenige Zahl b, die im Quadrat a ergibt:

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$

$\sqrt{a}$ ← Wurzelzeichen, ← Radikand — Wurzel aus a

Beispiel:
$\sqrt{4} = \pm 2$

Aufgepasst:
Oftmals ist man nur an der Lösung $\sqrt{a} \geq 0$ interessiert, aber man sollte nicht vergessen, dass die Quadratwurzel zwei Lösungen haben kann.

<u>Rechengesetze:</u>

$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$ (für $a \geq 0$ und $\sqrt{a^2} \geq 0$)

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Beispiele:

$(\sqrt{9})^2 = \sqrt{9^2} = 9$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36} = 2 \cdot 3 = 6$

$\sqrt{36} \div \sqrt{4} = \sqrt{9} = 6 \div 2 = 3$

Wie vereinfacht und berechnet man Wurzeln ohne Taschenrechner?

$\sqrt{900} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$
$\sqrt{800} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{400} = \sqrt{2} \cdot 20$
$\sqrt{25x^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} = 5x$

Approximation von $\sqrt{2}$:

$1^2 = 1$	$\leq 2 \leq$	$2^2 = 4$
$1.4^2 = 1.96$	$\leq 2 \leq$	$1.5^2 = 2.25$
$1.41^2 = 1.9881$	$\leq 2 \leq$	$1.42^2 = 2.0164$
$1.414^2 = 1.999396$	$\leq 2 \leq$	$1.415^2 = 2.002225$
$1.4142^2 = 1.99996164$	$\leq 2 \leq$	$1.4143^2 = 2.00024449$
$1.41421^2 = 1.9999899241$	$\leq 2 \leq$	$1.41422^2 = 2.0000182084$

und so weiter

Rechnen mit Potenzen und Wurzeln

Weitere Rechengesetze:

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{-mal}}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{-mal}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{-mal}}}_{m\text{-mal}} = a^{nm}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ (für } n \geq m) \qquad \text{Was ist bei } n < m? \qquad \frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Auf dem Taschenrechner kann man mit Potenzen und Wurzeln auf verschiedene Weise rechnen. Mit der rund markierten Taste $\boxed{\text{SCI/ENG}}$, die man mit 2nd aktiviert, schaltet man zwischen drei verschiedenen Zahldarstellungen um:

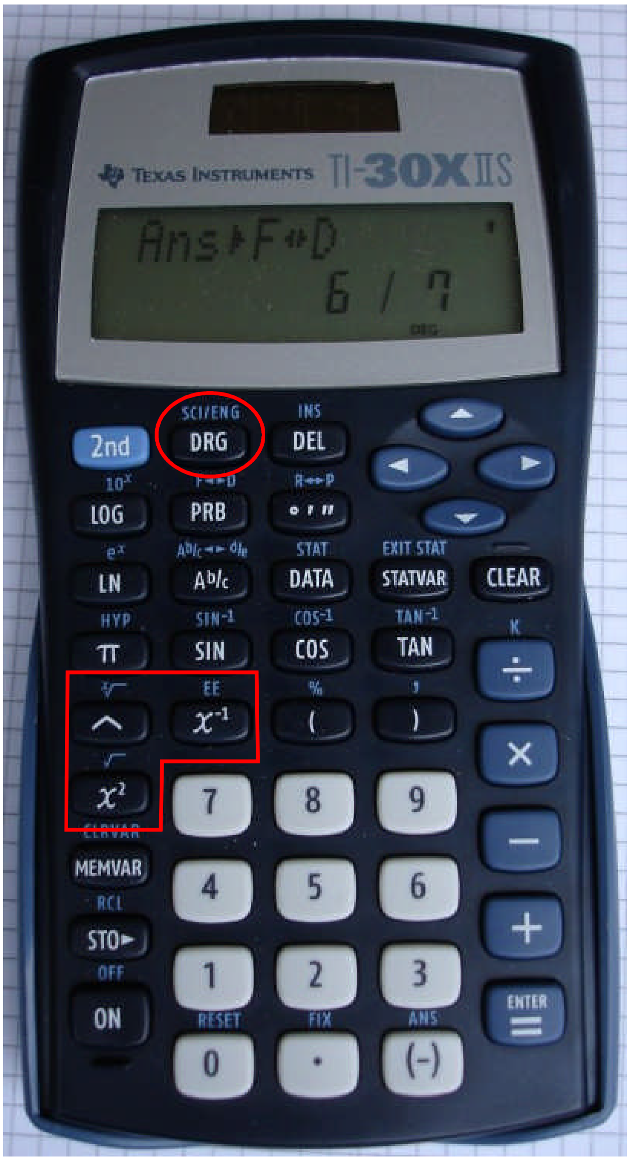
Normal:	123456789
Wissenschaftlich:	$1.23456789 \times 10^{08}$
Technisch:	$123.456789 \times 10^{06}$

Mit den anderen markierten Tasten lassen sich folgende Funktionen betätigen:

Die Taste $\boxed{\text{EE}}$, die man mit 2nd aktiviert, erlaubt es, in der wissenschaftlichen oder technischen Darstellung den Exponenten einzugeben.

Die Tasten $\boxed{x^{-1}}$ und $\boxed{x^2}$ rechnen den Kehrwert und das Quadrat aus, und mit der Taste $\boxed{\wedge}$ lassen sich andere Potenzen bestimmen.

Die Tasten $\boxed{\sqrt{\ }}$ und $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ erlauben es, die Quadratwurzel oder die x-te Wurzel zu berechnen.



Beispiele:

2 $\boxed{\wedge}$ 10 ergibt $1024 = 2^{10}$

10 $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ 1024 ergibt 2

50 $\boxed{x^{-1}}$ gibt 0.02

1.2345 $\boxed{\text{EE}}$ 2 gibt 123.45

$\boxed{\sqrt{\ }}$ 2 gibt 1.414213562

Beweise und irrationale Zahlen

In der Mathematik behauptet man nicht nur, sondern beweist auch, was man behauptet. Man stellt also eine Kette von Argumenten auf, die jemand Schritt für Schritt nachvollziehen kann und so ebenfalls zur Überzeugung gelangt, dass die Behauptung stimmt.

Beispiel:
Behauptung: $\boxed{\text{Es gibt keine grösste Primzahl.}}$
Beweis:
Nehmen wir an, es gibt eine grösste Primzahl p. Wir können somit

$$z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot p \qquad \text{(Produkt aller Primzahlen)}$$

berechnen. Weil z durch alle Primzahlen teilbar ist, kann $z + 1$ durch keine Primzahl teilbar sein und ist also entweder selber eine Primzahl, die grösser als p ist, oder ist nur durch Zahlen teilbar, die grösser als p sind. In beiden Fällen gibt es Primzahlen grösser als p, und p kann somit nicht die grösste Primzahl sein. q.e.d.

Beweise schliesst man mit q.e.d. (*quod erat demonstrandum*) ab, was "wie zu beweisen war" heisst. Der obige Beweis ist ein so genannter Widerspruchsbeweise (*reductio ad absurdum*), bei dem man nicht die Behauptung direkt beweist, sondern das Gegenteil wiederlegt.
Wieder mit einem Widerspruchsbeweis zeigt man, dass $\sqrt{2}$ unmöglich eine rationale Zahl sein kann, also eine <u>irrationale</u> Zahl sein muss.

Behauptung: $\boxed{\text{Die Zahl } \sqrt{2} \text{ ist keine rationale Zahl.}}$
Beweis:
Wir beginnen mit der Beobachtung, dass die Primfaktorzerlegung von Quadratzahlen für alle Primfaktoren immer gerade Exponenten hat.
Beispiele: $9 = 3^2$, $64 = 2^6$, $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$
Das ist nicht erstaunlich, wenn man schaut, was Quadrieren macht:
$12^2 = 12 \cdot 12 = (2^2 \cdot 3^1) \cdot (2^2 \cdot 3^1) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 2^2 \cdot 3^1 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^1 \cdot 3^1 = 2^4 \cdot 3^2 = 144$
Kehren wir zum Beweis zurück und nehmen an, es gibt eine rationale Zahl, die mit sich selbst multipliziert, die Zahl 2 ergibt. Das heisst, es gibt zwei natürliche Zahlen a und b, sodass gilt:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{oder } 2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Multipliziert man beide Seiten der rechten Gleichung mit b^2, so ergibt das $2b^2 = a^2$. Eine der beiden Quadratzahlen a^2 oder b^2 muss so aber den Primfaktor 2 mit einem ungeraden Exponenten enthalten. q.e.d.