Teilbarkeit von natürlichen Zahlen

Teilbarkeitsregeln:

Die Teilbarkeitsregeln beruhen alle darauf, dass man von einer Zahl einen grossen Teil wegschneiden kann, von dem man weiss, dass er sicher durch den betrachteten Teiler teilbar ist.

- Eine natürliche Zahl ist durch 2 teilbar,
  ... wenn die durch die letzte Ziffer gebildete Zahl durch 2 teilbar ist.
  $5233056 = \underbrace{5233050}_{\text{durch 2 teilbar}} + 6$

- Eine natürliche Zahl ist durch 4 teilbar,
  ... wenn die durch die letzten zwei Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
  $5233056 = \underbrace{5233000}_{\text{durch 4 teilbar}} + 56$

- Eine natürliche Zahl ist durch 8 teilbar,
  ... wenn die durch die letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.
  $5233056 = \underbrace{5233000}_{\text{durch 8 teilbar}} + 056$

- Eine natürliche Zahl ist durch 5 teilbar,
  ... wenn die durch die letzte Ziffer gebildete Zahl durch 5 teilbar ist.
  $5233075 = \underbrace{5233070}_{\text{durch 5 teilbar}} + 5$

- Eine natürliche Zahl ist durch 25 teilbar,
  ... wenn die durch die letzten zwei Ziffern gebildete Zahl durch 25 teilbar ist.
  $5233075 = \underbrace{5233000}_{\text{durch 25 teilbar}} + 75$

- Eine natürliche Zahl ist durch 3 teilbar,
  ... wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist.

- Eine natürliche Zahl ist durch 9 teilbar,
  ... wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist.

$$\begin{aligned} 73074 &= 7 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 1 \\ &= 7 \cdot (9999+1) + 3 \cdot (999+1) + 0 \cdot (99+1) + 7 \cdot (9+1) + 4 \cdot 1 \\ &= \underbrace{7 \cdot 9999 + 3 \cdot 999 + 0 \cdot 99 + 7 \cdot 9}_{\text{durch 9 (und damit auch durch 3) teilbar}} + 7 + 3 + 0 + 7 + 4 \end{aligned}$$

- Eine natürliche Zahl ist durch 11 teilbar,
  ... wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

  $$\begin{aligned} 25740 &= 2 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot (9999+1) + 5 \cdot (1001-1) + 7 \cdot (99+1) + 4 \cdot (11-1) + 0 \cdot 1 \\ &= \underbrace{2 \cdot 9999 + 5 \cdot 1001 + 7 \cdot 99 + 4 \cdot 11}_{\text{durch 11 teilbar}} + 2 - 5 + 7 - 4 + 0 \end{aligned}$$

  Die Zahlen 99, 9999 und so weiter (immer eine gerade Anzahl von Ziffern 9) sind durch 11 teilbar.
  Beispiel: $999999 = 909090 + 90909 = 10 \cdot 90909 + 1 \cdot 90909$
  $= (10 + 1) \cdot 90909 = 11 \cdot 90909$
  Die Zahlen 11, 1001 und so weiter (immer eine Ziffer 1, eine gerade Anzahl von Ziffern 0 und wieder eine Ziffer 1) sind durch 11 teilbar.
  Beispiel: $100001 = 99990 + 11 = 10 \cdot 9999 + 11$

Die Teilbarkeitsregeln hängen damit zusammen, dass wir im Dezimalsystem (also im 10-er-System) rechnen. Es gibt einfache Regeln für 2 und 5, die beide Teiler von 10 sind, und es gibt Regeln für die zwei Zahlen 9 und 11, also die zwei Zahlen 1 vor und 1 nach 10.

Zur Erinnerung:
Im 10-er-System bedeutet 5018 als Zahl 5 Tausender, 0 Hunderter, 1 Zehner und 8 Einer: $5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 8 \cdot 1$

Im 5-er-System gelten andere Teilbarkeitsregeln. Es gibt nur eine einfache Regel, und das ist die, dass jede durch 5 teilbare Zahl eine 0 als hinterste Ziffer hat. Gerade Zahlen lassen sich nicht an der letzten Ziffer erkennen, denn die Zahlen 0, 2, 4, 11, 13 sind alle gerade.

Zur Erinnerung:
Im 5-er-System bedeutet 323 als Zahl 3 Fünfundzwanziger, 2 Fünfer 3 Einer: $3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 3 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1$
Das entspricht der Zahl 88 im 10-er-System.

Im 5-er-System gibt es eine Teilbarkeitsregel für 4, die der Teilbarkeitsregel für 9 im 10-er-System entspricht. Ist die Quersumme durch 4 teilbar, so ist auch die Zahl durch 4 teilbar, und ist die Quersumme durch 2 teilbar, so ist auch die Zahl durch 2 teilbar.

Im 5-er-System gibt es keine Teilbarkeitsregel für 3, aber es gibt eine für 6, die der Teilbarkeitsregel für 11 im 10-er-System entspricht. Um herauszufinden, ob eine Zahl durch 3 teilbar ist, kann man also zuerst schauen, ob sie durch 2 teilbar ist. Ist sie es, so kann man die Regel für 6 direkt anwenden. Ist sie es nicht, so verdoppelt man die Zahl und wendet erst dann die Regel für 6 an.

Teilermengen und Primfaktorzerlegung

Definition: Zwei natürliche Zahlen a und b heissen komplementäre Teiler einer natürlichen Zahl n, wenn $n = a \cdot b$ ist.
Beispiel: 1 und 36 sowie 2 und 18 sind komplementäre Teiler von 36.

Teilermengen lassen sich leicht bestimmen, indem man die komplementären Teiler der Reihe nach bestimmt:

$$\begin{aligned} 36 &= 1 \cdot 36 \\ &= 2 \cdot 18 \\ &= 3 \cdot 12 \\ &= 4 \cdot 9 \\ &= 6 \cdot 6 \end{aligned}$$

$\mathbb{T}_{36} = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

$$\begin{aligned} 60 &= 1 \cdot 60 \\ &= 2 \cdot 30 \\ &= 3 \cdot 20 \\ &= 4 \cdot 15 \\ &= 5 \cdot 12 \\ &= 6 \cdot 10 \end{aligned}$$

$\mathbb{T}_{60} = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$

Die gemeinsamen Teiler von 36 und 60 sind:
$\mathbb{T}_{36} \cap \mathbb{T}_{60} = \{1,2,3,4,6,12\} \Rightarrow$ Der grösste gemeinsame Teiler ist 12.

Definition: Eine natürliche Zahl heisst Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selber teilbar ist.

Satz: Jede natürliche Zahl ist das Produkt von (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen.

Beispiel:
Die ersten zehn Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
Die Zahl 60 hat die Primfaktorzerlegung $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.
Die Zahl 1001 hat die Primfaktorzerlegung $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Methode zur Bestimmung der Primfaktoren:

	660
2	330
2	165
3	55
5	11
11	1

Um die Primfaktoren einer Zahl zu finden, beginnt man bei 2 und schaut, ob sie durch 2, durch 3, durch 5 und so weiter teilbar ist. Ist sie es, so schreibt man die Primzahl links und das Resultat der Division rechts. So fährt man fort, bis als Resultat der Division 1 herauskommt.

Aus den Primfaktoren einer Zahl wie 660 kann man die Teilermenge bestimmen. Die Zahl 1 ist immer Teiler. Jeder Primfaktor ist ebenfalls Teiler. Das Produkt von zwei, drei, vier und so weiter Primfaktoren ist auch Teiler. Für 660 findet man so die Teilermenge (nicht der Grösse nach, sondern der Reihefolge dieser Methode nach geordnet):

$\mathbb{T}_{660} = \{1,2,3,5,11,4,6,10,22,15,33,55,12,20,44,30,66,110,165,60,132,220,330,660\}$

Gemeinsame Teiler und Vielfache

Der grösste gemeinsame Teiler (ggT) lässt sich auf verschiedene Weise finden.

Methode durch Primfaktorzerlegung:

252	ggT	144
126	2	72
63	2	36
21	3	12
7	3	4
	36	

Um den ggT von zwei Zahlen zu bestimmen, sucht man die gemeinsamen Primfaktoren. Das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren ist der ggT.
Beispiel: ggT(252,144) = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Methode von Euklid (Euklidscher Algorithmus):
Siehe Flussdiagram auf Seite 13 in “Arithmetik und Algebra 2” von Walter Hohl.

4081	:	2585	=	1	Rest	1496
2585	:	1496	=	1	Rest	1089
1496	:	1089	=	1	Rest	407
1089	:	407	=	2	Rest	275
407	:	275	=	1	Rest	132
275	:	132	=	2	Rest	11
132	:	11	=	12	Rest	0

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) lässt sich aus dem ggT bestimmen. Für zwei natürliche Zahlen a und b gilt:

$$a \cdot b = \mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b) \qquad \mathrm{kgV}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a,b)}$$

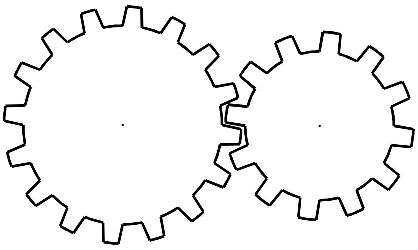
Beispiel:
$252 \cdot 144 = 36 \cdot 1008$
$1008 = 252 \cdot 144 : 36$

252	ggT	144
126	2	72
63	2	36
21	3	12
7	3	4

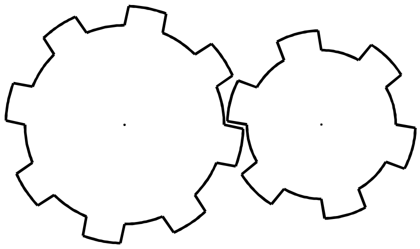
$\mathrm{kgV}(252,144) = 4 \cdot 252$
$= 7 \cdot 144$

Teiler und Vielfache bei Zahnrädern

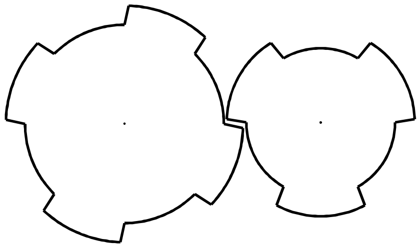
Gemeinsame Teiler und Vielfache von zwei natürlichen Zahlen können mit Zahnrädern veranschaulicht werden.



Das linke Zahnrad hat 16 Zähne, und das rechte 12.



Das linke Zahnrad hat 8 Zähne, und das rechte 6.



Das linke Zahnrad hat 4 Zähne, und das rechte 3.

In allen drei Fällen gilt, wenn das linke Rad dreimal ganz gedreht hat, dann hat das rechte Rad viermal ganz gedreht.
Das liegt an den gemeinsamen Teilern der Anzahl Zähne. Weil 2 ein gemeinsamer Teiler von 16 und 12 ist, kann man die Anzahl Zähne halbieren, die Grösse der Zähne dafür verdoppeln. Weil auch 4 ein gemeinsamer Teiler von 16 und 12 ist, kann man die Anzahl Zähne vierteln und die Zahngrösse dafür vervierfachen.

Der grösste gemeinsame Teiler (ggT):

ggT(16,12) = 4

16	ggT	12
8	2	6
4	2	3
	4	

ggT(8,6) = 2

8	ggT	6
4	2	3
	2	

ggT(4,3) = 1

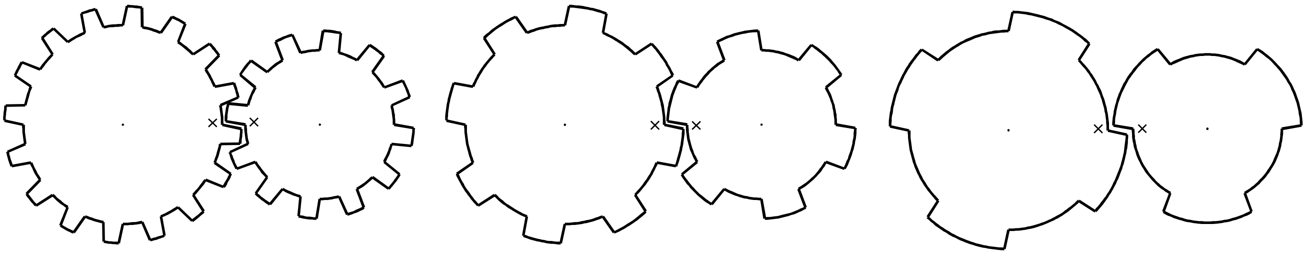
4	ggT	3
	1	

In allen drei Fällen gilt, wenn man die Anzahl Zähne des linken Rades durch den ggT teilt, ist das Resultat 4, und wenn man die Anzahl Zähne des rechten Rades durch den ggT teilt, ist das Resultat 3.

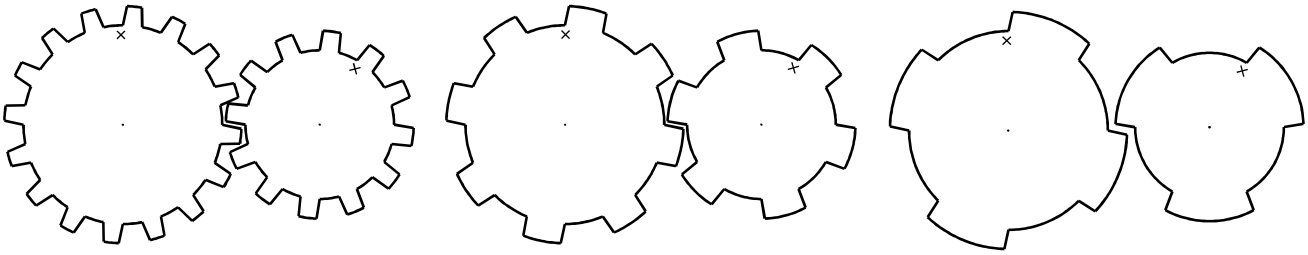
Wenn man die beiden Zahnräder um eine Anzahl Zähne dreht, die ein gemeinsames Vielfaches von 16 und 12 ist, sind sie wieder in der gleichen Position wie am Anfang.

Wir drehen das linke Zahnrad im Gegenuhrzeigersinn und das rechte im Uhrzeigersinn.

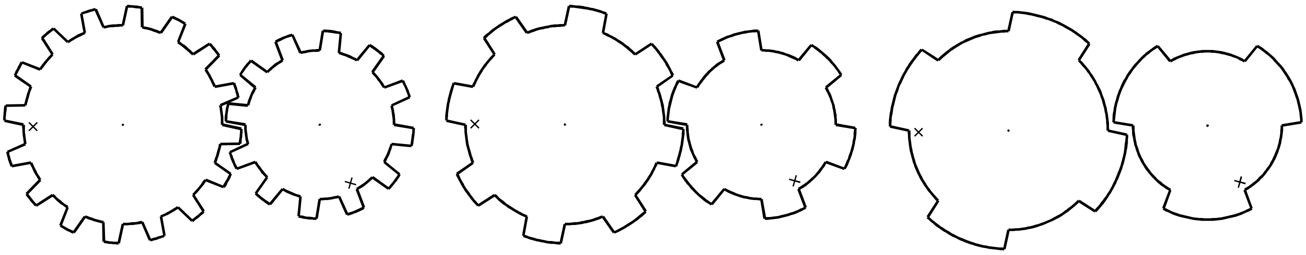
Ausgangsposition:



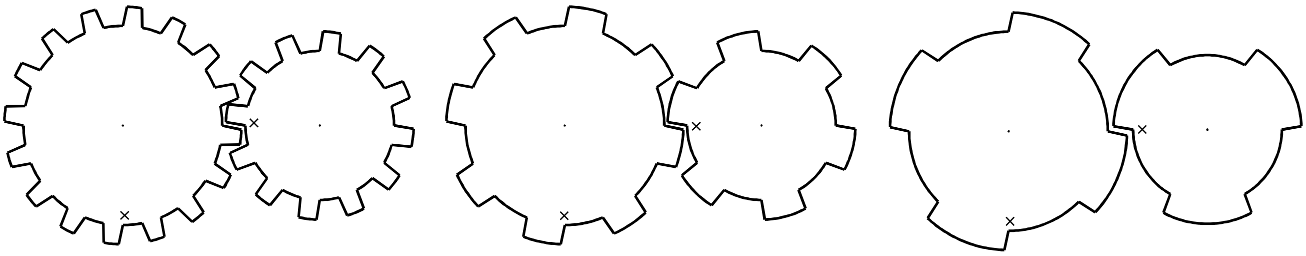
Nach einer ersten Drehung um so viele Zähne wie der ggT:



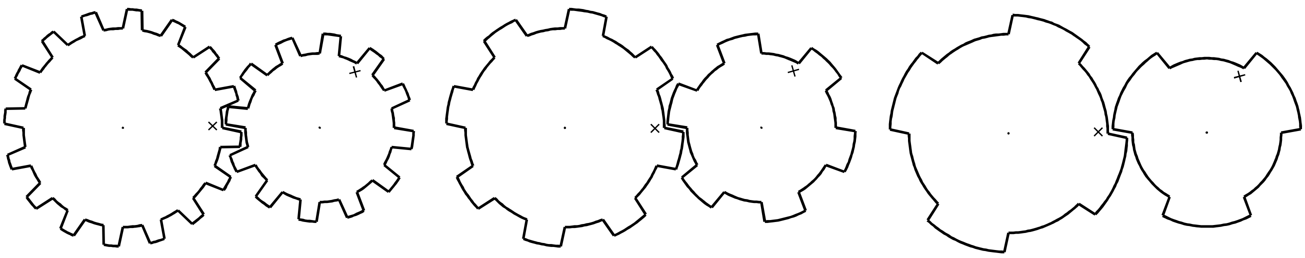
Nach einer zweiten Drehung um so viele Zähne wie der ggT:



Nach einer dritten Drehung um so viele Zähne wie der ggT:



Nach einer vierten Drehung um so viele Zähne wie der ggT:



Nach jeweils drei Drehungen um ggT Zähne ist das linke Zahnrad, und nach vier Drehungen um ggT Zähne das rechte Zahnrad wieder in der Ausgangsposition.

Bemerkungen zur Teilbarkeit

1. Wenn man die Primfaktorzerlegung der Zahl n sucht und weiss, dass $n \leq m \cdot m$ ist, so braucht man nur die Primzahlen zwischen 2 und m zu probieren. Wenn n durch keine dieser Zahlen teilbar ist, so ist n eine Primzahl.

   Grund:
   Wenn $n = a \cdot b$ gilt (wenn also a und b komplementäre Teiler von n sind), und wenn $n \leq m \cdot m$ ist, dann gilt $a \leq m$ oder $b \leq m$ (oder $a \leq m$ und $b \leq m$).
   Wenn $a > m$ und $b > m$ wäre, müsste $a \cdot b > m \cdot m$ sein. Weil $m \cdot m \geq n$ gilt, so müsste auch $a \cdot b > n$ gelten, was im Widerspruch zu $n = a \cdot b$ steht.
   Wenn wir etwa die komplementären Teiler von 36 anschauen, so ist immer einer kleiner oder gleich 6 und der andere grösser oder gleich 6.

   $$\begin{aligned} 36 &= 1 \cdot 36 \\ &= 2 \cdot 18 \\ &= 3 \cdot 12 \\ &= 4 \cdot 9 \\ &= 6 \cdot 6 \end{aligned}$$

   Beispiel 1:
   Gesucht sei die Primfaktorzerlegung von 899. Wir wissen, dass $899 \leq 30 \cdot 30 = 900$ ist. Somit müssen wir nur nach Primfaktoren suchen, die kleiner oder gleich 30 sind, und finden $899 = 29 \cdot 31$.
   Beispiel 2:
   Gesucht sei die Primfaktorzerlegung von 9167. Wir wissen, dass $9167 \leq 100 \cdot 100 = 10000$ ist. Somit müssen wir nur nach Primfaktoren suchen, die kleiner oder gleich 100 sind, und finden die Zerlegung $9167 = 89 \cdot 103$.

2. Wenn man den grössten gemeinsamen Teiler von drei Zahlen a, b und c sucht, so kann man erst den ggT von b und c und dann den ggT von a und dem ggT von b und c bestimmen:
   ggT(a, b, c) = ggT(a, ggT(b, c))

   Es kommt dabei natürlich nicht auf die Reihenfolge der Zahlen an:

   $$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(a, b, c) &= \mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b, c)) \\ &= \mathrm{ggT}(b, \mathrm{ggT}(a, c)) \\ &= \mathrm{ggT}(c, \mathrm{ggT}(a, b)) \end{aligned}$$

   Beispiel:
   Gesucht sei der ggT von 156, 208 und 234.
   ggT(156, 208) = 52
   ggT(234, 52) = 26

3. Wie kann ich überprüfen, ob der Wert, den ich für den ggT zweier Zahlen gefunden habe, auch wirklich stimmt?
   Der ggT, den ich für 156 und 208 gefunden habe, ist 26.
   $\left.\begin{array}{l}156 : 26 = 6\\ 208 : 26 = 8\end{array}\right\}$ Die 26 ist also richtigerweise Teiler beider Zahlen.
   Die 26 ist aber nicht der kleinste Teiler, denn 6 und 8 sind nicht teilerfremd. (Sie sind gerade und somit durch 2 teilbar.)
   Der ggT von 156 und 208 ist also 52.
   156 : 52 = 3
   208 : 52 = 4
   Die beiden Zahlen 3 und 4 sind teilerfremd.

4. Wie kann ich überprüfen, ob der Wert, den ich für den ggT von drei Zahlen gefunden habe, auch wirklich stimmt?
   Der ggT, den ich für 156, 260 und 390 gefunden habe, ist 26.
   156 : 26 = 6
   260 : 26 = 10
   390 : 26 = 15
   Die beiden Zahlen 6 und 10 sind beide durch 2 teilbar, die Zahlen 6 und 15 durch 3 und die Zahlen 10 und 15 durch 5.

5. Teilen mit Rest:

   Vier Personen haben 23 Äpfel, die sie gerecht untereinander verteilen möchten.
   23 : 4 = 5.75 = 5 3/4
   Jede Person bekommt 5 ganze Äpfel und 3 Viertel Äpfel.

   Vier Personen haben 23 Goldmünzen, die sie gerecht untereinander verteilen möchten. (Goldmünzen verlieren an Wert, wenn man sie zerteilt.)
   23 : 4 = 5 Rest 3
   Jede Person bekommt 5 Goldmünzen, 3 Münzen bleiben übrig.

   Wenn gilt: a : b = c Rest d, dann gilt auch: $a = b \cdot c + d$.

   Beispiel: 23 : 4 = 5 Rest 3 $\Rightarrow$ $4 \cdot 5 + 3 = 23$.

   Wie berechnet man den Rest mit dem Taschenrechner?
   Die Zahlen 23 und 4 sind in der Aufgabe gegeben, denn es sind 23 Goldstücke und 4 Personen.
   Die Zahl 5 findet man mit 23 : 4 = 5.75, wenn man auf die nächste ganze Zahl abrundet.
   Den Rest findet man mit $23 - (4 \cdot 5) = 3$.

Die Menge ℚ der rationalen Zahlen

Ein <u>Bruch</u> ist ein Quotient von zwei ganzen Zahlen a und b ($b \neq 0$), für den wir statt a:b schreiben:

$$\frac{a}{b}$$

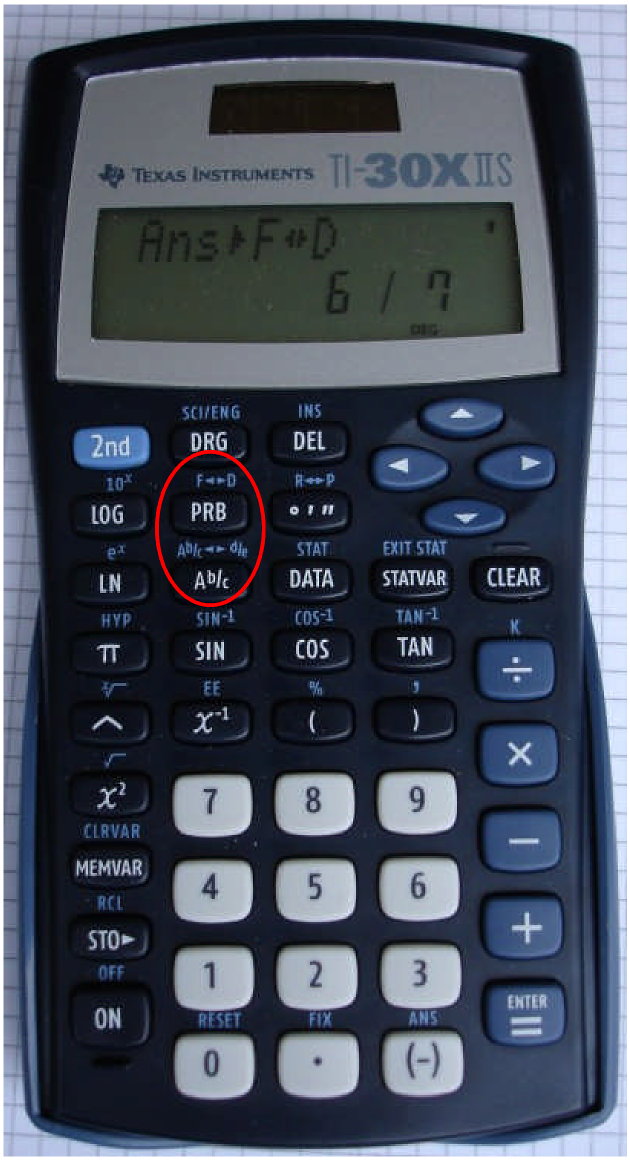
a ← Zähler
— ← Bruchstrich
b ← Nenner

Bei einem <u>echten Bruch</u> ist der Zähler kleiner als der Nenner.
Bei einem <u>Stammbruch</u> ist der Zähler 1 und der Nenner grösser als 1.
Bei einem <u>Dezimalbruch</u> ist der Nenner eine Potenz von 10.
Bei einem <u>unechten Bruch</u> ist der Zähler grösser oder gleich dem Nenner.
Bei einem <u>Scheinbruch</u> ist der Nenner ein Teiler des Zählers.
Ein Bruch heisst vollständig <u>gekürzt</u>, wenn der ggT(Zähler,Nenner) gleich 1 ist.

Die <u>rationalen Zahlen</u> sind die Zahlen, die sich als Brüche darstellen lassen. Die Zahl, die dem Quotienten 6:5 entspricht, lässt sich auf verschiedene Arten schreiben:

unechter Bruch: $\frac{6}{5}$ gemischte Zahl: $1\frac{1}{5}$ Dezimalzahl: 1.2

Auf dem Taschenrechner kann man mit Brüchen rechnen. Im eingekreisten Teil der Tastatur gibt es die folgenden Tasten:



Die Taste $\boxed{\text{F}\leftrightarrow\text{D}}$, die man mit 2nd aktiviert, rechnet rationale Zahlen von Dezimalzahlen in Brüche um und umgekehrt (für 6÷7: 0.857142857 oder 6 / 7).

Die Taste $\boxed{\text{A}^{\text{b}}/_{\text{c}}\leftrightarrow{}^{\text{d}}/_{\text{e}}}$, die man auch mit 2nd aktiviert, rechnet gemischte Zahlen in unechte Brüche um und umgekehrt (für 7÷6: 1⊔1/6 oder 7 / 6).

Die Taste $\boxed{\text{A}^{\text{b}}/_{\text{c}}}$ erlaubt es sogar, Brüche direkt einzugeben:
1⌟2⌟3 = 1⊔2/3 oder
2⌟3 = 2 / 3,
wobei ⌟ einem Druck dieser Taste entspricht. Man kann auf diese Art gemischte Zahlen und echte oder unechte Brüche eingeben.

Kürzen, Erweitern, Gleichnamigmachen

Zwei Brüche $\frac{z_1}{n_1}$ und $\frac{z_2}{n_2}$ sind genau dann gleichwertig, wenn $z_1 \cdot n_2 = z_2 \cdot n_1$ gilt.
Dies entspricht der früheren Definition, dass zwei arithmetische Terme gleichwertig sind, wenn sie die gleiche Zahl bedeuten, und dass zwei algebraische Terme gleichwertig sind, wenn für alle möglichen Einsetzungen für die in ihnen vorkommenden Variablen derselbe Wert herauskommt.

Wenn der Zähler und der Nenner eines Bruchs einen gemeinsamen Teiler haben, so kann man den Bruch kürzen.

Wenn man bei einem Bruch Zähler und Nenner mit der gleichen ganzen Zahl $k \neq 0$ multipliziert, so sind der ursprüngliche Bruch und der resultierende Bruch gleichwertig. Der ursprüngliche Bruch ist mit dem Faktor k erweitert worden, und k heisst Erweiterungsfaktor.

Wenn man zwei Brüche so erweitert, dass sie denselben Nenner bekommen, so sagt man, sie seien gleichnamig gemacht worden.

Beispiele:

$$\frac{120}{160} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \qquad \xrightarrow{\text{kürzen}} \quad \xleftarrow[\text{erweitern}]{}$$

$\frac{2}{9}$ und $\frac{5}{6}$ gleichnamig gemacht gibt: $\frac{4}{18}$ und $\frac{15}{18}$

Weil $\frac{-3}{5} = \frac{(-1)\cdot(-3)}{(-1)\cdot 5} = \frac{3}{-5}$ gilt, schreibt man einfach $-\frac{3}{5}$ dafür.

Kürzen, erweitern und gleichnamig machen kann man auch Brüche, die Variablen enthalten. Sind Zähler und Nenner beide ein Produkt, und enthalten sie gleichwertige Terme als Faktoren, so darf man diese kürzen:

$$\frac{T_1 \cdot T_2 \cdot T_3}{T_4 \cdot T_5 \cdot T_6} = \frac{T_1 \cdot \cancel{T_2} \cdot T_3}{T_4 \cdot \cancel{T_5} \cdot T_6} = \frac{T_1 \cdot T_3}{T_4 \cdot T_6}, \text{ falls } T_2 = T_5 \text{ gilt.}$$

Beispiel:

$$\frac{25a\cdot(3b + 2cd)}{(2dc + 3b)\cdot x} = \frac{25a}{x}$$

Rechnen mit Brüchen

<u>Ordnung</u> auf den rationalen Zahlen:
Am einfachsten sieht man, welche von zwei durch Brüche dargestellte rationalen Zahlen grösser als die andere ist, wenn man sie gleichnamig macht.
Beispiel:
Welcher der beiden Brüche $\frac{14}{27}$ und $\frac{23}{45}$ ist grösser?

$$\frac{14}{27}=\frac{14\cdot 5}{27\cdot 5}=\frac{70}{135} > \frac{23}{45}=\frac{23\cdot 3}{45\cdot 3}=\frac{69}{135}$$

<u>Addition</u> und <u>Subtraktion</u> von rationalen Zahlen:
Um zwei durch Brüche dargestellte rationalen Zahlen zu addieren oder subtrahieren, macht man sie gleichnamig.
Beispiel:

$$\frac{5}{48}+\frac{1}{36}=\frac{5\cdot 3}{48\cdot 3}+\frac{1\cdot 4}{36\cdot 4}=\frac{15}{144}+\frac{4}{144}=\frac{19}{144}$$

$$\frac{5}{48}-\frac{1}{36}=\frac{5\cdot 3}{48\cdot 3}-\frac{1\cdot 4}{36\cdot 4}=\frac{15}{144}-\frac{4}{144}=\frac{11}{144}$$

<u>Multiplikation</u> und <u>Division</u> von rationalen Zahlen:
Um zwei durch Brüche dargestellte rationalen Zahlen zu multiplizieren, multipliziert man die beiden Zähler und die beiden Nenner:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad (b,\ d \neq 0)$$

Beispiel:
Zwei Drittel von fünf Achtel sind: $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 8}=\frac{5}{3\cdot 4}=\frac{5}{12}$

Um zwei durch Brüche dargestellte rationalen Zahlen zu dividieren, multipliziert man den Dividend mit dem Kehrwert des Divisors:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad (b,\ c,\ d \neq 0)$$

Definition:
Der <u>Kehrwert</u> (oder die Kehrzahl) eines Bruchs $\frac{a}{b}$ ist der Bruch $\frac{b}{a}$.

Wenn der Zähler und/oder der Nenner eines Bruches selber wieder ein Bruch ist, spricht man von einem <u>Doppelbruch</u>.
Der <u>Hauptbruchstrich</u> wird länger gezeichnet.

$$\cfrac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$$

Rationale Zahlen kann man auf verschiedene Arten darstellen. Die Zahl, die beispielsweise entsteht, wenn man 1 durch 2 dividiert, kann man als Bruch 1/2 oder als Dezimalzahl 0.5 schreiben. Schwieriger ist es bei der Zahl, die entsteht, wenn man 1 durch 3 dividiert, weil die Dezimalzahl für 1/3 unendlich lang ist und durch 0.3333333 nur näherungsweise festgelegt wird. Ist man also am genauen Resultat interessiert, rechnet man besser mit Brüchen.

Eine Dezimalzahl heisst <u>periodisch</u>, wenn sich die Stellen nach dem Komma ab einem gewissen Punkt wiederholen.
Beispiel:
0.333333... für 1/3 oder 0.53171717... für 1316/2475
Statt den Pünktchen schreibt man einen Strich über der Periode.
Beispiel:
$0.\overline{3}$ für 1/3 oder $0.53\overline{17}$ für 1316/2475

Wie bestimmt man den Bruch aus der periodischen Dezimalzahl?

$$\begin{array}{rcr} 53.171717... & = & 100x \\ -0.531717... & = & x \\ \hline 52.64 & = & 99x \end{array}$$

Die gesuchte Zahl ist x. Multipliziere diese Zahl so, dass die Periode beim Subtrahieren verschwindet.

Daraus folgt, dass 52.64 = 99x oder 5264 = 9900x ist. Somit gilt

$$x = \frac{5264}{9900} = \frac{1316}{2475}$$

Gleichungen mit Bruchtermen

$\frac{17x}{12} + \frac{3x + 7}{16} = 5$	linke Seite gleichnamig machen
$\frac{68x}{48} + \frac{3(3x + 7)}{48} = 5$	zweiter Summand ausmultiplizieren
$\frac{68x + 9x + 21}{48} = 5$	zusammenfassen
$\frac{77x + 21}{48} = 5$	mit 48 multiplizieren
$77x + 21 = 240$	21 subtrahieren
$77x = 219$	durch 77 dividieren

$$x = \frac{219}{77}$$