

4. Gravitation und die gegenseitige Anziehung von Massen

Rainer Hauser

April 2011

1 Einleitung

1.1 Die Gewichtskraft und die Gravitation

Die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ mit $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, die man auf der Erde spürt, ist ein Spezialfall einer allgemeineren Kraft, die man *Gravitation* nennt. Wegen ihr bewegen sich die Planeten um die Sonne, wegen ihr bewegt sich der Mond um die Erde, wegen ihr fällt aber auch ein Apfel vom Ast, an dem er hängt, auf den Boden.

Alle Massen ziehen sich an. Dass die Erde mit ihrer grossen Masse uns anzieht, spüren wir dauernd. Dass sich aber auch kleine Massen gegenseitig anziehen, kann man mit der Cavendish-Waage nachweisen, obwohl die Gravitation zwischen ihnen sehr klein ist.

1.2 Masse und Gewicht

Die Masse eines Körpers ist unabhängig vom Ort, aber das Gewicht, also die Kraft mit der er von der Erde angezogen wird, hängt vom Ort ab. Auf der Erdoberfläche variiert das Gewicht nur minim, weil die Anziehung durch die Erde überall etwa gleich stark ist. Auf dem Mond aber ist das Gewicht nur etwa ein Sechstel vom Gewicht auf der Erde, weil der Mond Massen viel schwächer anzieht als die Erde.

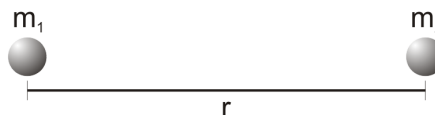
Die Masse m , die in $F_G = m \cdot g$ vorkommt, nennt man die schwere Masse eines Körpers. Sie bestimmt, wie der Körper nahe der Erdoberfläche auf die Gravitation reagiert. Daneben gibt es aber noch die so genannte träge Masse m , welche in der Dynamik in $F_{res} = m \cdot a$, dem zweiten Newton'schen Gesetz, vorkommt. Dass diese beiden Grössen gleich sind, ist nicht selbstverständlich, ist aber mit extrem hoher Präzision nachgewiesen worden, weil die Gleichheit der trägen und schweren Masse ein Grundpfeiler der allgemeinen Relativitätstheorie ist.

2 Die Gravitationskraft

2.1 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern mit den Massen m_1 , m_2 und dem Abstand r ist gemäss dem *Newton'schen Gravitationsgesetz*

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1)$$



wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ die so genannte *Gravitationskonstante* ist. Weil auf der Oberfläche der Erde $F_G = m \cdot g$ gilt, muss für den Erdradius $r_E = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ und die Erdmasse $m_E = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$$g = G \cdot \frac{m_E}{r_E^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2} \approx 9.83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

gelten, was, wie die Rechnung zeigt, bis auf Rundungsungenauigkeiten auch stimmt.

2.2 Eigenschaften der Gravitationskraft

Die Gravitationskraft ist eigentlich eine sehr schwache Kraft, hat aber spezielle Eigenschaften:

1. Die Gravitationskraft wirkt zwischen allen Körpern:
Die Gravitationskraft zwischen zwei Tassen mit Massen 0.2kg, die im Abstand von einem Meter auf einem Tisch stehen, ist gemäss (1) zwar nur etwa $3 \cdot 10^{-12}$ N, besteht aber trotzdem.
2. Die Gravitationskraft lässt sich nicht abschirmen:
Man kann die Gravitationskraft durch keine Isolationsschicht abschirmen. Sie wirkt ungehindert auf jeden Körper. Astronauten erleben Schwerelosigkeit, weil Astronaut und Raumschiff relativ zueinander keine Beschleunigung erfahren. (Wenn das Seil eines Liftes reisst, kann man auch auf der Erde Schwerelosigkeit erleben.)
3. Die Gravitationskraft nimmt schnell ab, ist aber unbegrenzt:
Die Gravitationskraft nimmt umgekehrt proportional zum Abstand im Quadrat ab. Im Gegensatz zur elektrischen Ladung gibt es keine negative Gravitation, welche die Wirkung der positiven Gravitation aufheben könnte.

Die *Gezeiten* mit Ebbe und Flut kommen daher, dass das Wasser des Meeres nicht überall gleich stark vom Mond angezogen wird. Auf der dem Mond zugewandten Seite der Erde ist die Anziehungskraft des Mondes etwa 6% grösser als auf der abgewandten Seite, was aus

$$\frac{F_{abgewandt}}{F_{zugewandt}} = \frac{(384\,000\text{ km} - 6\,370\text{ km})^2}{(384\,000\text{ km} + 6\,370\text{ km})^2} \approx 0,94$$

folgt.

3 Bewegung um einen Zentralkörper

3.1 Kreisbewegung

Bewegt sich ein Körper wie etwa ein künstlicher Satellit auf einer Kreisbahn um einen Zentralkörper wie etwa die Erde, so ist die auf ihn wirkende resultierende Kraft die Gravitationskraft. Hat der Körper die Masse m_K und der Zentralkörper die Masse m_Z , so gilt also

$$F_{res} = m_K \cdot a = m_K \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m_Z \cdot m_K}{r^2} = F_G \quad m_Z = \frac{v^2 \cdot r}{G} \quad v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

gemäss Kinematik, Dynamik und (1). Aus dem Erdbahnradius und der Sonnenmasse lässt sich somit berechnen, dass die Erde mit etwa $30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ um die Sonne kreist. Man kann daraus aber auch bestimmen, dass *geostationäre Satelliten* in einer Höhe von 36 000 km über dem Äquator kreisen.

3.2 Die Kepler'schen Gesetze

Johannes Kepler hat aus den Messdaten von Tycho Brahe seine drei berühmten Gesetze abgeleitet:

1. Erstes Kepler-Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, die einen gemeinsamen Brennpunkt haben, in dem die Sonne steht.
2. Zweites Kepler-Gesetz: Die Verbindungslinie von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Drittes Kepler-Gesetz: Der Quotient von Umlaufzeit eines Planeten im Quadrat geteilt durch die Länge seiner grossen Halbachse hoch drei ist für alle Planeten gleich.

