

6. Energie und der Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie

Rainer Hauser

November 2010

1 Einleitung

1.1 Eigenschaften der Energie

Wesentliche Eigenschaften der Energie:

- Körper brauchen Energie, um Arbeit verrichten zu können.
- Es sind immer Körper, die Energie haben, wobei diese belebt oder unbelebt, fest, flüssig oder gasförmig sein können.
- Während ein Körper Arbeit verrichtet, nimmt seine Energie ab, und er kann nur Arbeit verrichten, solange er Energie hat.
- Körper haben Energie, weil Arbeit an ihnen verrichtet wurde.

Beispiele:

Ein Bagger braucht Benzin, um Erde zu verschieben, und eine Uhr braucht eine Batterie, eine Feder oder etwas Ähnliches, um die Zeiger zu bewegen. Beide bleiben stehen, wenn die Energie versiegt. Das Wasser, das durch die Arbeit einer Pumpe vom Tal in den Stausee gepumpt worden ist, und der Pfeilbogen, der durch Muskelkraft gespannt worden ist, haben durch das Pumpen oder Spannen Energie gewonnen.

1.2 Grundformen der Energie

Zwei wichtige Grundformen der Energie:

- *Kinetische Energie* oder *Bewegungsenergie*: Ein Körper in Bewegung hat Energie, mit der er Arbeit verrichten kann.
- *Potenzielle Energie* oder *Lageenergie* beziehungsweise *elastische Energie*: Jeder Körper, auf den eine Kraft wirkt, hat potenzielle Energie.

Beispiele:

Ein Hammer kann mit seinem Schwung, der kinetische Energie ist, einen Nagel einschlagen. Ein Buch, im Büchergestell liegt und herunter fallen kann, und ein Bogen, der gespannt ist und einen Pfeil abschießen kann, haben potenzielle Energie und können Arbeit verrichten, sobald man sie nicht mehr daran hindert.

2 Arbeit und Leistung

2.1 Arbeit

Arbeit ist immer mit Bewegung verbunden. Wenn ein Körper durch eine Kraft in seiner Bewegungsrichtung bewegt wird, so wird an ihm Arbeit verrichtet. Die verrichtete *Arbeit* ist definiert durch

$$W = F_{\parallel} \cdot s \tag{1}$$

über die Kraft F_{\parallel} , die parallel zur Bewegungsrichtung auf den Körper wirkt, und durch den Weg s , den der Körper dabei zurücklegt. Sie hat die Einheit *Joule* mit $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Beispiele:

Ein Esel, der einen Karren zieht, verrichtet am Karren Arbeit, und ein Mann, der ein herunter gefallenes Buch aufhebt und ins Büchergestell zurückstellt, verrichtet am Buch Arbeit.

Wirkt die Kraft nicht parallel zur Bewegungsrichtung, so zerlegt man sie erst in eine Komponente \vec{F}_{\parallel} parallel und eine Komponente \vec{F}_{\perp} senkrecht zur Bewegungsrichtung, sodass für die Kraft

$$F_{\parallel} = F \cdot \cos \alpha$$

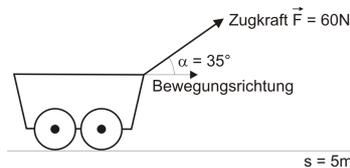
und für die Arbeit nach (1) entsprechend

$$W = F \cdot \cos \alpha \cdot s \quad (2)$$

gilt, wobei α der Winkel zwischen Kraft- und Bewegungsrichtung ist.

Beispiel:

Ein Leiterwagen soll mit einer Kraft von 60 N bei einem Winkel von 35° eine Strecke von 5 m weit gezogen werden. Welche Arbeit wird dabei geleistet?



Mit der Kraft
 $F_{\parallel} = F \cdot \cos \alpha = 60 \text{ N} \cdot \cos 35^\circ$
 ist die Arbeit nach (2)
 $W = F \cdot \cos \alpha \cdot s$
 $= 60 \text{ N} \cdot \cos 35^\circ \cdot 5 \text{ m} \approx 245 \text{ J}$.

Weil die Arbeit vom Winkel zwischen der Richtung der Krafteinwirkung und der Bewegungsrichtung abhängt, kann Arbeit positiv oder negativ sein:

Die Arbeit ist negative, wenn die Parallelkomponente der Kraft gegen die Bewegungsrichtung wirkt.	$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	$\Rightarrow W > 0$	Beispiel: Die Gewichtskraft leistet negative Arbeit an einem senkrecht nach oben fliegenden Ball.
	$\alpha = 90^\circ$	$\Rightarrow W = 0$	
	$90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$	$\Rightarrow W < 0$	

2.2 Leistung

Eine Arbeit kann langsam oder schnell verrichtet werden. Mit der mittleren *Leistung* definiert durch

$$P = \frac{W}{\Delta t} \quad (3)$$

beschreibt man, wie viel Arbeit in der Zeitspanne Δt verrichtet wird. Sie hat die Einheit *Watt* mit $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$.

Beispiel:

Jemand mit einem Gewicht von 50 kg rennt in 10 Minuten auf einen 600 Meter hohen Turm und überwindet somit im Durchschnitt einen Meter pro Sekunde.

Hubarbeit $W = 50 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 600 \text{ m}$, Leistung $P = W/\Delta t = 50 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 600 \text{ m}/600 \text{ s} \approx 500 \text{ W}$.
 (Bemerkung: Die Leistung im physikalischen Sinn bleibt dieselbe, ob eine Person in 10 Minuten auf einen 600 Meter hohen Turm rennt, oder ob sie nur in einer Sekunde einen Meter hoch steigt.)

Beispiele:

Bei Maschinen und Geräten gibt man normalerweise die maximale Leistung an. So hat eine helle Glühbirne 10^2 W Leistung, ein Mittelklasseauto 10^5 W Leistung, ein Spaceshuttle beim Start 10^{10} W Leistung, und die Sonne 10^{26} W Leistung.

Kennt man die mittlere Leistung P eines Geräts und die Zeitspanne Δt , während der es in Betrieb ist, so kann man wegen (3) mit

$$W = P \cdot \Delta t$$

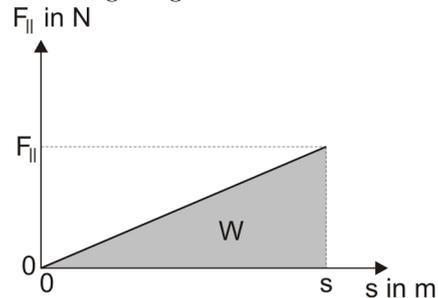
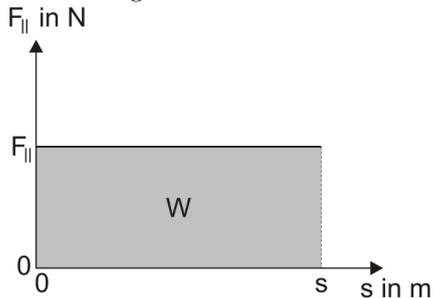
die Arbeit berechnen, die das Gerät verrichtet hat.

Deshalb ist auch eine andere Einheit für die Arbeit weit verbreitet, welche die Leistung in einer Stunde als Mass nimmt. Sie heisst Kilowattstunde (kWh) und ist eine Einheit für Arbeit, obwohl die im Namen enthaltene Einheit Watt auf den ersten Blick eher an eine Einheit für Leistung denken lässt:

$$1 \text{ kWh} = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

2.3 Kraft-Weg-Diagramme

Die Arbeit W ist gleich der Fläche unter dem Graphen im Kraft-Weg-Diagramm:



Ist die Kraft F_{\parallel} konstant und somit unabhängig von s , so ist $W = F_{\parallel} \cdot s$ die graue Fläche.

Ist die Kraft F_{\parallel} proportional zum Weg s , so ist $W = \frac{1}{2} \cdot F_{\parallel} \cdot s$ die graue Fläche.

Häufige Formen von Arbeit:

- *Hubarbeit* $W = m \cdot g \cdot h$ mit der Höhe h (siehe unten).
- *Beschleunigungsarbeit* $W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ mit der Geschwindigkeit v (siehe unten).
- *Dehnungsarbeit* $W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$ mit der Federkonstanten D (siehe Dynamik).

3 Berechnung der Energie

3.1 Arbeit und Energie

Ein Körper kann mit seiner Energie Arbeit an einem Körper verrichten, aber er hat nur deshalb Energie, weil vorher Arbeit an ihm verrichtet worden ist.

Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu verrichten. An einem Körper, der vorher die Energie E_1 hatte, wird Arbeit W verrichtet, sodass er danach die Energie E_2 hat. Es gilt

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W \qquad E_2 = E_1 + W \qquad (4)$$

für den Zusammenhang zwischen der Energie vorher und nachher. Das ist die Definition von Energie, die somit ebenfalls die Einheit *Joule* hat.

Formen von Arbeit und zugehörige Energieform:

- *Hubarbeit* führt zu *Lageenergie* oder *gravitationeller potenzieller Energie*.
- *Beschleunigungsarbeit* führt zu *Bewegungsenergie* oder *kinetischer Energie*.
- *Dehnungsarbeit* führt zu *elastischer Energie* oder *elastischer potenzieller Energie*.
- *Reibung* führt zu *Wärme*, die auch eine Form von *kinetischer Energie* ist.

Bemerkung: Der Begriff *potenzielle Energie* wird auf zweifache Weise gebraucht. Einerseits hat jeder Körper, auf den eine Kraft wirkt, potenzielle Energie und andererseits schränkt man den Begriff ein auf die spezielle Form, die auf der Gravitationskraft beruht. Im Folgenden wird der Ausdruck nur noch für die gravitationelle potenzielle Energie benutzt.

3.2 Kinetische Energie

Berechnung der Beschleunigungsarbeit für einen Körper im freien Fall:

Die Kraft ist die konstante Gewichtskraft F_G , und die Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0 = 0$.

Die Bewegungsgleichung ist gemäss Kinematik $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$, und mit $a = \frac{F_{\parallel}}{m}$ (wegen $F_{\parallel} = m \cdot a$) und mit $v_0 = 0$ folgt $s = \frac{mv^2}{2F_{\parallel}}$. Daraus folgt weiter $W = F_{\parallel} \cdot s = F_{\parallel} \cdot \frac{mv^2}{2F_{\parallel}} = \frac{1}{2}mv^2$. Die Beschleunigungsarbeit ist

also unabhängig von F_{\parallel} und s . (Man kann zeigen, dass diese Gleichung nicht nur für konstante Kräfte, sondern ganz allgemein gilt.)

Die *kinetische Energie* E_k ist

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5)$$

und hängt nur von der Masse m und der Geschwindigkeit v ab.

Bemerkung:

Weil die kinetische Energie von der Geschwindigkeit im Quadrat abhängt, bedeutet doppelte Geschwindigkeit vierfache Energie. Deshalb sind Geschwindigkeitsbegrenzungen auf Strassen durchaus sinnvoll.

Änderung der Geschwindigkeit von v_1 auf v_2 :

$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, $E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$, $W = \Delta E = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$. (Bremst man ein Auto, so ist das negative Beschleunigungsarbeit.)

3.3 Potenzielle Energie

Berechnung der Hubarbeit:

Die Kraft ist die konstante Gewichtskraft F_G .

Die Kraft F_{\parallel} ist die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$. Damit ist für die Höhe h die Hubarbeit $W = F_{\parallel} \cdot s = m \cdot g \cdot h$.

Die Hubarbeit hängt nur von der Masse und der Höhe ab. (Man kann zeigen, dass die Arbeit generell unabhängig vom Weg ist.)

Die *potenzielle Energie* E_p ist

$$E_p = m \cdot g \cdot h \quad (6)$$

und hängt nur von der Masse m und der Höhe h ab.

Änderung der Höhe von h_1 auf h_2 :

$E_1 = m \cdot g \cdot h_1$, $E_2 = m \cdot g \cdot h_2$, $W = \Delta E = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$. (Stellt man Gegenstände tiefer, so ist das negative Hubarbeit.)

3.4 Bezugssystem

Sowohl die kinetische wie auch die potenzielle Energie ist nicht unabhängig von der Wahl eines Bezugssystems.

Kinetische Energie:

Die Geschwindigkeit und somit auch die kinetische Energie hängt vom Bezugssystem ab. Sitzt man unter dem Koffer im Gepäcksnetz im fahrenden Zug, so hat der Koffer keine kinetische Energie. Sieht man ihm aber vom Bahnsteig aus, so hat er sehr wohl kinetische Energie.

Potenzielle Energie:

Die Höhe und somit auch die potenzielle Energie hängt vom Bezugssystem ab. Betrachtet man den Fussboden als Nullpunkt für die Höhe, so hat jemand im ersten Stock einen anderen Nullpunkt als jemand im vierten Stock.

Sowohl die durch (5) bestimmte kinetische Energie wie auch die durch (6) bestimmte potenzielle Energie sind somit nicht unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems. Um mit Energie zu rechnen, muss man also entweder ein Bezugssystem festlegen, oder man beschränkt sich auf die durch (4) festgelegte Energieänderung ΔE , ohne sich um die Gesamtenergie eines Körpers zu kümmern.