

# 8. Impuls und zentrale, elastische oder unelastische Stösse

Rainer Hauser

November 2010

## 1 Einleitung

### 1.1 Impuls als Mass für die Aufprallwucht

Wenn jemand einen Ball zugeworfen bekommt, nimmt die subjektiv empfundene Aufprallwucht mit der Geschwindigkeit zu. Die Geschwindigkeit ist aber nicht allein massgebend. Werden ein Tischtennisball und ein Medizinball geworfen, so hängt die Aufprallwucht offensichtlich auch von der Masse des Balls ab. Das Produkt von Masse und Geschwindigkeit ist deshalb ein naheliegendes Mass für die Aufprallwucht.

### 1.2 Zusammenstösse

Stossen zwei Autos zusammen, so deformieren sie sich und bleiben stehen. Stossen hingegen zwei Billardkugeln zusammen, so werden sie abgelenkt und rollen weiter, ohne dass sich ihre Form ändert. Diese zwei Arten Zusammenstösse sind also sehr verschieden. Man unterscheidet deshalb:

- *Elastische Stösse*: Bei elastischen Stössen deformieren sich die beteiligten Körper kaum und ändern nur ihre Geschwindigkeit. Bei vollkommen elastischen Stössen bleibt die gesamte kinetische Energie der beteiligten Körper erhalten, und keine Energie wird durch Deformation in Wärme umgewandelt.
- *Unelastische Stösse*: Bei unelastischen Stössen deformieren sich die beteiligten Körper, und ihre Geschwindigkeiten werden vermindert. Bei vollkommen unelastischen Stössen kleben die Körper zusammen und setzen ihren Weg gemeinsam fort.

## 2 Impuls und Impulserhaltung

### 2.1 Impuls

#### Definition:

Der *Impuls*  $\vec{p}$  ist definiert als das Produkt

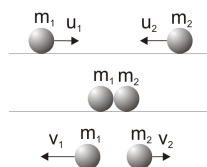
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (1)$$

von Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$ .

Wie bei der Energie gibt es auch für den Impuls definiert durch (1) einen Erhaltungssatz, wie man am folgenden Beispiel sehen kann:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  mit  $a = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$  lässt sich umformen zu  $\vec{F} = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{mv_2 - mv_1}{t_2 - t_1} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ , wobei man annimmt, dass  $\Delta t$  sehr klein ist.

Sind zwei Körper mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  bei einem Zusammenstoss in Wechselwirkung, so gilt wegen "Actio gleich Reactio"  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , also  $\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$ .



Daraus folgt weiter  $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$  oder  $\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$ . Der gesamte Impuls der beiden Massen ändert sich also nicht. Das gilt zu jedem Zeitpunkt.

Es gilt also auch für die Zeitspanne unmittelbar vor bis unmittelbar nach dem Zusammenstoß. Hier ist die Impulsänderung der einen Masse  $\Delta\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1$ , und diejenige der anderen  $\Delta\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2$ . Mit  $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$  folgt daraus  $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ . Der Gesamtimpuls nach dem Zusammenstoß ist gleich dem Gesamtimpuls vorher als direkte Folge des Newton'schen Wechselwirkungsprinzips "Actio gleich Reactio".

## 2.2 Impulserhaltungssatz

**Satz (Impulserhaltungssatz):**

Die Vektorsumme  $\vec{p}_{total} = \sum_i \vec{p}_i$  aller Impulse ist in einem geschlossenen System konstant.

Beispiel:

Spring ein 70 kg schwerer Mensch mit der Geschwindigkeit  $6 \frac{m}{s}$  aus einem ruhenden, 120 kg schweren Boot ans Ufer, dann bewegt sich das Boot nach dem Sprung mit  $3.5 \frac{m}{s}$  vom Ufer weg.

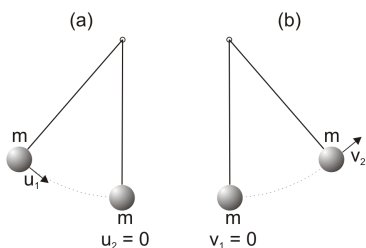
## 3 Stöße

### 3.1 Zentrale und vollkommen elastische Stöße

Beim zentralen, vollkommen elastischen Stoß kann damit, dass sowohl der Impuls als auch die kinetische Energie erhalten bleibt, die Geschwindigkeit der beiden Massen berechnet werden. Hier soll nicht dieser allgemeine Fall, sondern nur ein einfacher Spezialfall besprochen werden.

Beispiel:

Bei einem Doppelpendel mit zwei vollkommen elastischen Kugeln der Masse  $m$  bewege sich die eine Kugel anfänglich auf die andere zu ( $u_1$ ), während die andere still steht ( $u_2 = 0$ ). Aus der Impulserhaltung folgt  $mu_1 = m(v_1 + v_2)$  für die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  nach dem Stoß. Weil der Zusammenstoß vollkommen elastisch ist, bleibt die kinetische Energie erhalten, und es gilt  $\frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2)$ .



Das Experiment zeigt, dass nach dem Stoß  $v_1 = 0$  ist, und dass  $v_2 = u_1$  gilt. Die beiden Kugeln tauschen also ihre Geschwindigkeiten. Das folgt auch rechnerisch aus den beiden Erhaltungssätzen, wie die folgenden Berechnungen zeigen.

Die beiden Gleichungen lassen sich zu

$$u_1 = v_1 + v_2 \quad u_1^2 = v_1^2 + v_2^2$$

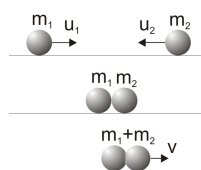
umformen, indem man die gemeinsamen Faktoren  $m$  und  $\frac{1}{2}$  eliminiert.

Quadriert man die erste Gleichung, so folgt  $u_1^2 = (v_1 + v_2)^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2$ , woraus durch Vergleich mit der zweiten Gleichung sofort  $v_1v_2 = 0$  folgt. Somit muss  $v_1 = 0$  oder  $v_2 = 0$  gelten.

### 3.2 Zentrale und vollkommen unelastische Stöße

Beim zentralen, vollkommen unelastischen Stoß bleiben die zwei Massen nach dem Stoß aneinander kleben wie zwei Lehmkugeln. Damit bleibt die kinetische Energie nicht erhalten, denn ein Teil davon wird bei der bleibenden Deformation in Wärme umgewandelt.

Zwei Körper mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  mit den Geschwindigkeiten  $u_1$  und  $u_2$  treffen zentral aufeinander und setzen die Bewegung als ein Körper mit Masse  $m_1 + m_2$  und Geschwindigkeit  $v$  fort.



Aus dem Impulserhaltungssatz  $m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$  folgt

$$v = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2}$$

für die Geschwindigkeit  $v$ .

Aus dem Unterschied zwischen  $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$  und  $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$  lässt sich der Teil der Energie bestimmen, die durch die Deformation in Wärme umgewandelt wurde.