Funktionen und andere Zuordnungen

Rainer Hauser

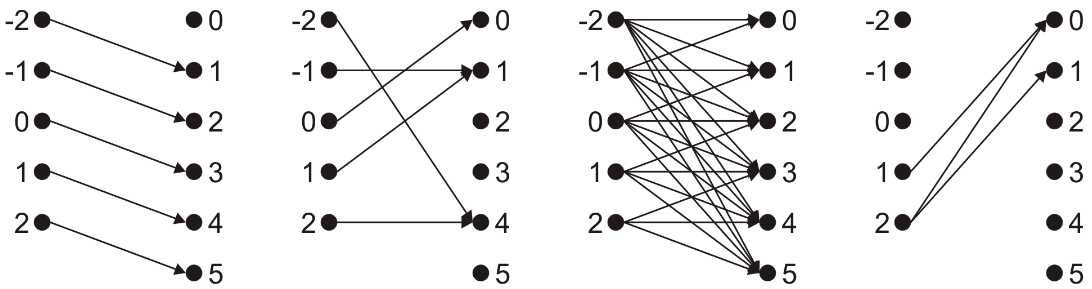
November 2011

1 Allgemeine Zuordnungen

1.1 Pfeildarstellung von Zuordnungen

Sätze wie "Das ist der Schlüssel zu diesem Schloss" und "Hänsel ist der Bruder von Gretel" sagen etwas aus über eine Zuordnung zwischen Objekten. Zuordnungen sind Beziehungen zwischen den Elementen zweier Mengen. Bei endlichen Mengen lassen sich Zuordnungen durch Pfeile darstellen. Legt man beispielsweise sämtliche Schlösser und sämtliche Schlüssel auf einen Tisch, so kann man mit Pfeilen jedem Schloss die dazu gehörigen Schlüssel zuordnen.

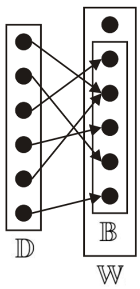
In der unten stehenden Abbildung sind vier verschiedene Zuordnungen als Pfeildiagramme gezeigt, wobei die eine Menge jeweils links und die andere Menge rechts platziert ist. Beide Mengen sind Zahlen, und die Zuordnungen können mathematisch beschrieben werden. In (a) zeigen die Pfeile von der linken Zahl zur rechten Zahl, wobei die rechte Zahl um 3 grösser ist als die linke Zahl, während in (b) die rechte Zahl das Quadrat der linken ist. In (c) zeigt ein Pfeil von einer Zahl links zu einer Zahl rechts, wenn die rechte Zahl grösser als die linke Zahl ist, und in (d) zeigt ein Pfeil von einer Zahl links zu einer Zahl rechts, wenn die rechte Zahl kleiner ist als die linke Zahl.



(a) (b) (c) (d)

Wenn eine Zuordnung wie in (a) und (b) jedem Element der linken Menge genau ein Element der rechten Menge zuordnet, nennt man die Zuordnung *eindeutig* (auf Englisch many-to-one). Eine eindeutige Zuordnung ist eine *Funktion*. Die Funktion in (a) ist *eineindeutig* (auf Englisch one-to-one), weil zu jedem Element der Menge rechts höchstens ein Pfeil führt. Die Zuordnungen in (c) und (d) sind keine Funktionen, denn sie sind – in englischer Terminologie – many-to-many Zuordnungen.

1.2 Funktionen



Für Funktionen schreibt man $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{W}$, $x \mapsto f(x)$, was bedeutet, dass die Funktion f genannt wird und jedem Element aus der Menge $\mathbb{D}$ genau ein Element aus der Menge $\mathbb{W}$ zuordnet. Die Menge $\mathbb{D}$ heisst *Definitionsbereich* und die Menge $\mathbb{W}$ *Wertebereich*. Für $x \in \mathbb{D}$ ist $f(x)$ das *Bild*. Wie in der nebenstehenden Figur ist $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{W}$ die Menge aller Bilder von Elementen aus $\mathbb{D}$ und heisst der *Bildbereich*. Der Bildbereich kann kleiner sein als der Wertebereich, wenn der Wertebereich grosszügig festgelegt worden ist.

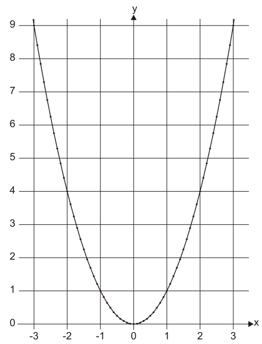
1.3 Graph einer Funktion

Wählt man für eine Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$

- ein geeignetes, beschränktes Intervall I_x, das ganz im Definitionsbereich liegt,
- ein geeignetes, beschränktes Intervall I_y, das die Bilder aller Werte in I_x enthält,

und trägt man die Menge aller Punkte (x, y) mit $x \in I_x$ und $y = f(x) \in I_y$ in einem Koordinatensystem ein, dessen x-Achse I_x und dessen y-Achse I_y umfasst, so ist die entstehende geometrische Figur der *Graph* von f im Intervall I_x.

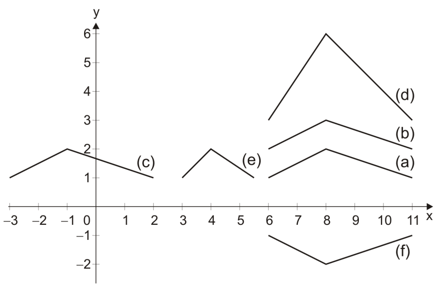
Beispiel:
Die Quadratfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$, die jeder reellen Zahl das Quadrat zuordnet, hat als Definitionsbereich die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Als Wertebereich ist ebenfalls $\mathbb{R}$ angegeben, obwohl die Funktion keine negativen Zahlen als Bilder hat. Der Bildbereich ist die Menge aller reellen Zahlen grösser oder gleich 0. Der Wertebereich hätte also auch als $\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 0\}$ in mathematischer Notation angegeben werden können.
Im nebenstehenden Graphen sind die Intervalle $I_x = [-3, 3]$ und $I_y = [0, 9]$ gewählt worden. Der Graph der Quadratfunktion $f(x) = x^2$ ist eine Parabel, die für betragsmässig sehr grosse x-Werte beliebig grosse y-Werte annehmen kann. Die Abbildung zeigt also nur einen Ausschnitt des ganzen Graphen. Je nachdem, was gezeigt werden soll, wählt man den Ausschnitt so, dass er gewisse Maxima und Minima, Nullstellen oder sonstige Punkte enthält, für die man sich besonders interessiert.



2 Transformationen von Funktionen

2.1 Übersicht über die Transformationen

Algebraische Transformationen einer Funktion haben eine geometrische Transformation des Graphen zur Folge. Die nebenstehende Abbildung zeigt (a) den Graphen einer auf dem Intervall $[6, 11]$ definierten Funktion $f(x)$, (b) den Graphen der Funktion $f(x) + 1$, (c) den Graphen der Funktion $f(x + 9)$, (d) den Graphen der Funktion $3 \cdot f(x)$, (e) den Graphen der Funktion $f(2x)$ und (f) den Graphen der Funktion $(-1) \cdot f(x)$.



Diese aus einer Funktion $f(x)$ gewonnenen Funktionen sind Beispiele von algebraischen Transformationen dieser Funktion. Diese Transformationen sind von der Form $f(x)+a$, $f(x+a)$, $a \cdot f(x)$ und $f(a \cdot x)$. Ihr Effekt auf den Graphen sind Verschiebungen, Streckungen und Spiegelungen. (Streckungen müssen nicht notwendigerweise zu einer Vergrösserung des Graphen führen. Eine Streckung um 0.5 beispielsweise ist eigentlich eine Stauchung auf die Hälfte, wird mathematisch aber als Streckung bezeichnet.)

2.2 Algebraische Transformationen der Form $f(x) + a$

Eine algebraische Transformationen der Form $f(x)+a$ für $a \in \mathbb{R}$ bewirkt als geometrische Transformation auf den Graphen von f eine Verschiebung um a parallel zur y-Achse. Der Definitionsbereich ist gleich wie von f. Im Beispiel aus der obigen Abbildung gilt:

x	6	8	11
$f(x)$	1	2	1
$f(x) + 1$	2	3	2

Ist a grösser als 0, verschiebt sich der Graph nach oben, und ist a kleiner als 0, so verschiebt er sich nach unten. Die Form des Graphen bleibt hingegen gleich.

2.3 Algebraische Transformationen der Form $f(x+a)$

Eine algebraische Transformationen der Form $f(x+a)$ für $a \in \mathbb{R}$ bewirkt als geometrische Transformation auf den Graphen von f eine Verschiebung um $-a$ parallel zur x-Achse. Der Definitionsbereich verschiebt sich also gegenüber dem Definitionsbereich von f. Im Beispiel aus der obigen Abbildung gilt:

x	-3	-1	2	6	8	11
$f(x)$				1	2	1
$f(x+9)$	1	2	1			

Ist a grösser als 0, verschiebt sich der Graph nach links, und ist a kleiner als 0, so verschiebt er sich nach rechts. Die Form des Graphen bleibt hingegen gleich.

2.4 Algebraische Transformationen der Form $a \cdot f(x)$

Eine algebraische Transformationen der Form $a \cdot f(x)$ für $a \in \mathbb{R}$ bewirkt als geometrische Transformation auf den Graphen von f für $a > 0$ eine Streckung um a parallel zur y-Achse und für $a = -1$ eine Spiegelung an der x-Achse. Der Definitionsbereich ist gleich wie von f. Im Beispiel aus der obigen Abbildung gilt:

x	6	8	11
$f(x)$	1	2	1
$3 \cdot f(x)$	3	6	3
$(-1) \cdot f(x)$	-1	-2	-1

Die Form des Graphen ändert sich, falls $a \neq \pm 1$ ist.

2.5 Algebraische Transformationen der Form $f(a \cdot x)$

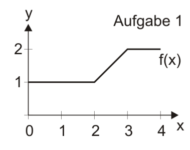
Eine algebraische Transformationen der Form $f(a \cdot x)$ für $a \in \mathbb{R}$ bewirkt als geometrische Transformation auf den Graphen von f für $a > 0$ eine Streckung um $\frac{1}{a}$ parallel zur x-Achse und für $a = -1$ eine Spiegelung an der y-Achse. Der Definitionsbereich verschiebt sich also gegenüber dem Definitionsbereich von f. Im Beispiel aus der obigen Abbildung gilt:

x	3	4	5.5	6	8	11
$f(x)$				1	2	1
$f(2x)$	1	2	1			

Die Form des Graphen ändert sich, falls $a \neq \pm 1$ ist.

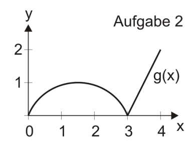
2.6 Aufgaben

Aufgabe 1



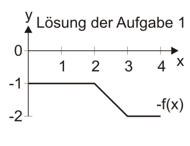
Gegeben ist die im Intervall $[0, 4]$ definierte Funktion $f(x)$ mit dem Graphen gemäss Abbildung. Bestimmen Sie den Graphen der Funktion $-f(x)$.

Aufgabe 2



Gegeben ist die im Intervall $[0, 4]$ definierte Funktion $g(x)$ mit dem Graphen gemäss Abbildung. Bestimmen Sie den Graphen der Funktion $\dfrac{g(x)}{2} + 1$.

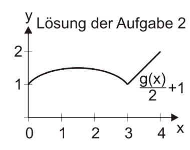
2.7 Lösungen



Lösung der Aufgabe 1

Die algebraische Transformation ist von der Form $a \cdot f(x)$ mit $a = -1$, ist also eine Spiegelung an der x-Achse.

Lösung der Aufgabe 2



Das sind zwei algebraische Transformationen: Erst wird aus $g(x)$ die Funktion $0.5 \cdot g(x)$, und anschliessend wird (mit $h(x) = 0.5 \cdot g(x)$) aus $h(x)$ die Funktion $h(x) + 1$.

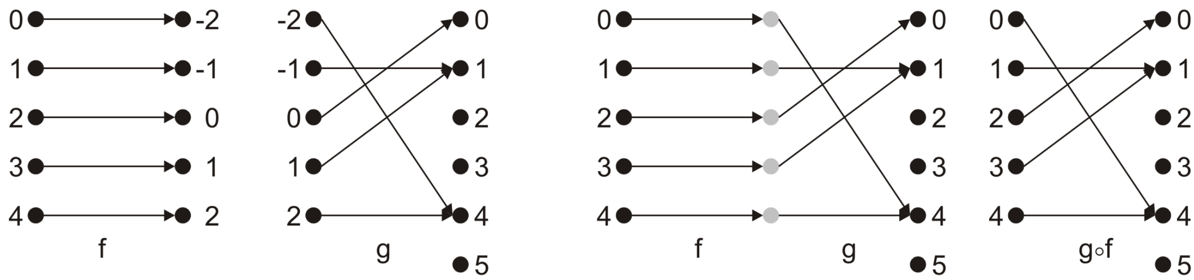
3 Zusammengesetzte Funktionen

3.1 Eingabe und Ausgabe einer Funktion

Gegeben seien zwei Funktionen:

- $f\colon x \mapsto x-2$ mit $\mathbb{D}_f = \{0,1,2,3,4\}$ und $\mathbb{W}_f = \{-2,-1,0,1,2\}$
- $g\colon x \mapsto x^2$ mit $\mathbb{D}_g = \{-2,-1,0,1,2\}$ und $\mathbb{W}_g = \{0,1,2,3,4,5\}$

wie in der unten stehenden Figur auf der linken Seite gezeigt.



Unter der Bedingung

$$\mathbb{B}_f \subseteq \mathbb{D}_g$$

kann man das Resultat von f nehmen und als Eingabewert für g nehmen wie in der obigen Abbildung rechts gezeigt. Die so entstehende Funktion wird $g \circ f$ genannt, und es gilt $g \circ f\colon x \mapsto (x-2)^2$ in diesem Beispiel. Wenn der Bildbereich der Funktion f also ganz im Definitionsbereich der Funktion g enthalten ist, kann man die Funktionen f und g zu $g \circ f$ zusammensetzen, indem man die Ausgabe (auf Englisch Output) von f nimmt und als Eingabe (auf Englisch Input) für g benutzt, sodass $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ gilt. Gibt man $g \circ f$ den Namen h, so sieht man der Funktion h (wie $h\colon x \mapsto (x-2)^2$ im obigen Beispiel) nicht mehr an, dass sie ursprünglich aus zwei Funktionen zusammengesetzt worden ist.

3.2 Das Zusammensetzen von Funktionen

Um zwei Funktionen zusammenzusetzen, benutzt man am einfachsten verschiedene Variablen. Will man beispielsweise zu den gegebenen Funktionen $f\colon x \mapsto x-2$ und $g\colon x \mapsto x^2$ die Funktion $h = g \circ f$ bestimmen, so setzt man mit der zusätzlichen Variablen y erst $f\colon x \mapsto x-2 = y$ und $g\colon y \mapsto y^2$ und bekommt dann $h\colon x \mapsto x-2 = y \mapsto y^2 = (x-2)^2$. So lassen sich auch kompliziertere Funktionen zusammensetzen.

Beispiel:
Sei $f\colon x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ und $g\colon x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ oder $g\colon y \mapsto y^2 + \frac{1}{y}$, weil ja die Variable beliebig gewählt werden darf. Setzt man $y = 3x^2 - 2x + 1$ in $y^2 + \frac{1}{y}$ ein, so bekommt man $(3x^2 - 2x + 1)^2 + \frac{1}{3x^2-2x+1}$, sodass $g \circ f\colon x \mapsto (3x^2 - 2x + 1)^2 + \frac{1}{3x^2-2x+1}$ gelten muss.

Man beachte, dass für viele Funktionenpaare $g \circ f \neq f \circ g$ gilt, es also auf die Reihenfolge ankommt. Ob man zum Beispiel erst quadriert und danach etwas dazu zählt, oder ob man erst etwas dazu zählt und danach quadriert, spielt eine Rolle, weil im zweiten Fall die dazu gezählte Zahl mit quadriert wird.

3.3 Aufgaben

Aufgabe 3

Gegeben sind $f\colon x \mapsto 2x + 1$, $g\colon x \mapsto 3x$.
Bestimmen Sie $(f \circ g)(x)$ und $(g \circ f)(x)$.

Aufgabe 4

Gegeben sind $f\colon x \mapsto 3x - 1$, $g\colon x \mapsto x^2$, $h\colon x \mapsto \dfrac{2}{x}$.
Bestimmen Sie $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ h)(x)$, $(h \circ g)(x)$, $(g \circ g)(x)$, $(f \circ f)(x)$.

3.4 Lösungen

Lösung der Aufgabe 3

$(f \circ g)(x) = 6x + 1$, $(g \circ f)(x) = 6x + 3$.

Lösung der Aufgabe 4

$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 1$, $(g \circ f)(x) = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$, $(f \circ h)(x) = \dfrac{6}{x} - 1$,
$(h \circ g)(x) = \dfrac{2}{x^2}$, $(g \circ g)(x) = x^4$, $(f \circ f)(x) = 9x - 4$

4 Inverse Funktionen

4.1 Identitätsfunktion

Man kann eine Funktion statt als Zuordnung auch als Operation betrachten. Die Funktion $x \mapsto x - 1$ beispielsweise operiert eine Einheit von der Eingabe weg, so wie der Chirurg bei einer Blinddarmoperation den so genannten "Appendix vermiformis" aus dem Körper des Patienten entfernt. Wenn der Patient auf dem Bett in den Operationssaal gerollt wird, ist das quasi die Eingabe, und wird er anschliessend ohne den Appendix – oder Wurmfortsatz auf Deutsch – wieder hinaus gerollt, ist das die Ausgabe.

Es gibt eine spezielle Funktion $id_{\mathbb{M}}$: $\mathbb{M} \to \mathbb{M}$, $x \mapsto x$ mit dem Namen *Identität*, die jedem Element x des Wertebereichs $\mathbb{M}$ den Wert x zuordnet. Sie ist deshalb speziell, weil man von einer Funktion normalerweise erwartet, dass sie die Eingabe verändert. Die Quadratfunktion beispielsweise quadriert die Eingabe. Die Identität gibt aber die Eingabe unverändert als Ausgabe zurück. Bei der Identitätsfunktion wird somit der Patient sozusagen ohne operativen Eingriff wieder aus dem Operationssaal gerollt.

4.2 Das Rückgängigmachen einer Veränderung

Will man eine Blinddarmoperation rückgängig machen, müsste man dem Patienten den meist entzündeten Wurmfortsatz wieder einsetzen, was unter Umständen gar nicht mehr geht, weil er bereits entsorgt worden ist. (Bei chirurgischen Eingriffen ist es in den meisten Fällen auch gar nicht wünschenswert, sie wieder rückgängig zu machen.) Im Fall von mathematischen Funktionen ist die Situation anders. Subtrahiert eine Funktion f beispielsweise 1 von der Eingabe, kann eine andere Funktion g, die 1 zur Eingabe addiert, die Wirkung der ersten Funktion als $g \circ f$ wieder aufheben. Addition von a wird durch Subtraktion von a und Multiplikation mit a wird durch Division durch a neutralisiert.

Es gibt zwar nicht für alle mathematischen Funktionen eine Funktion, die deren Wirkung rückgängig macht, aber für jede eineindeutige Funktionen f gibt es eine solche so genannte *inverse* Funktion (auch Umkehrfunktion genannt), die mit f^{-1} bezeichnet wird. Es gilt $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{M}}$, wobei angenommen wird, dass f und f^{-1} beide auf $\mathbb{M}$ definiert sind.

Beispiel:
Die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ definiert auf $\mathbb{R}$ ist nicht eineindeutig, weil $a^2 = (-a)^2$ gilt. Beschränkt man diese Funktion aber auf den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$, so ist sie eineindeutig, und die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion. Die mathematischen Gesetze $\sqrt{a^2} = a$ und $(\sqrt{a})^2 = a$ bedeuten nichts anderes als $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{D}}$ für f: $x \mapsto x^2$.

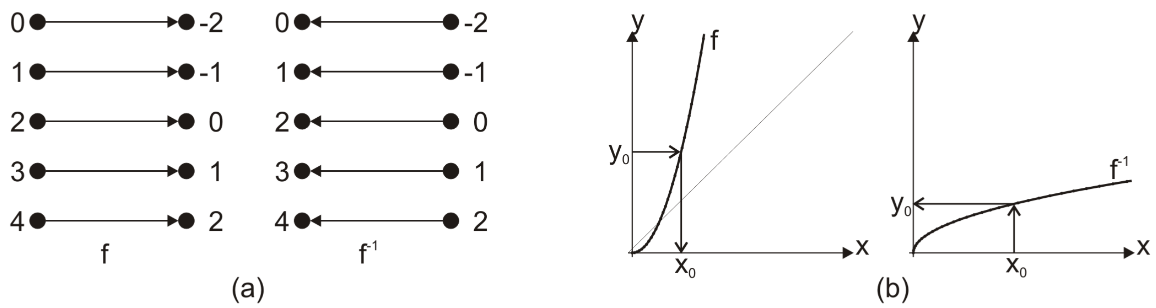
Es gibt Funktionen f, für die $f^{-1} = f$ gilt. Die Funktionen $x \mapsto (-1) \cdot x$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$ sind Beispiele dafür. Das sind Funktionen, die sich selber rückgängig machen, wenn man sie zweimal anwendet.

4.3 Bestimmung der inversen Funktion

Bei der Bestimmung der zusammengesetzten Funktion sind die Funktionen f und g bekannt, und die Funktion $h = g \circ f$ ist gesucht. Will man aber für eine Funktion f die inverse Funktion f^{-1} finden, sind f und $f \circ g = id_{\mathbb{M}}$ bekannt, während $g = f^{-1}$ gesucht ist. Weil $f \circ g$ als Identität eine einfache Funktion ist, lässt sich g leicht finden, indem man die Gleichung $f(x) = y$ nach x auflöst, denn es folgt aus $f(x) = y$ die Umkehrung $f^{-1}(y) = x$. Weil wir gewohnt sind, die Variable x als Eingabe und die Variable y als Ausgabe zu benutzen, hier aber mit $f^{-1}\colon y \mapsto f^{-1}(y) = x$ die Rollen vertauscht sind, kann man die Variablen x und y einfach umbenennen, um wieder geordnete Verhältnisse zu bekommen.

Beispiel:
Für $f\colon x \mapsto 3x-4$ kann man $f(x) = 3x-4 = y$ nach x auflösen, was $x = \frac{y+4}{3}$ ergibt. Die Umkehrfunktion ist also $f^{-1}(y) = \frac{y+4}{3}$ oder – anders geschrieben – mit x als gewohnter Eingabevariablen $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$.

Funktionen mit einem endlichen (nicht zu grossen) Definitionsbereich $\mathbb{D}$ stellt man oft als Pfeildiagramme dar. Ist eine eineindeutige Funktion f als Pfeildiagramm gegeben, wobei der Wertebereich möglichst klein gewählt sei, sodass $\mathbb{W} = \mathbb{B}$ gilt, so bekommt man ein Pfeildiagramm von f^{-1}, indem man die Richtung der Pfeile wie in (a) der unten stehenden Abbildung gezeigt umkehrt. (Jetzt kann man noch die Mengen links und rechts vertauschen, damit die Pfeile in der üblichen Richtung von links nach rechts zeigen.)



Für die Visualisierung von Funktionen mit unendlichem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ benutzt man Graphen. In einem Graphen kann man den Funktionswert für den Eingabewert x_0 ablesen, indem man von x_0 auf der x-Achse senkrecht nach oben oder unten geht, bis man den Graphen trifft, und anschliessend nach links oder rechts geht, bis man die y-Achse trifft, wo man den zugehörigen Wert y_0 ablesen kann. Für einen gegebenen Wert y_0 kann man aber auch den zugehörigen Wert x_0 finden, indem man den umgekehrten Weg geht. So lassen sich die Funktionswerte der Umkehrfunktion aus dem Graphen der gegebenen Funktion ablesen. Spiegelt man den Graphen an der Geraden $x = y$, so bekommt man somit den Graphen der Umkehrfunktion wie in (b) der obigen Abbildung dargestellt. Spiegelung an der Geraden $x = y$ bedeutet Vertauschung der Variablen x und y.

4.4 Aufgaben

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die inverse Funktion f^{-1} für $f\colon x \mapsto 7x+3$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f\colon x \mapsto 4x^3 - 7$.

4.5 Lösungen

Lösung der Aufgabe 5

Aus $y = 7x+3$ folgt $x = \dfrac{y-3}{7}$, und weiter durch Vertauschen von x und y ergibt das $f^{-1}\colon x \mapsto \dfrac{x-3}{7}$.

Lösung der Aufgabe 6

Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und eineindeutig, sodass auch $f^{-1}\colon x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x+7}{4}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.