Kombinatorik

Rainer Hauser

Dezember 2012

1 Einleitung

1.1 Die Kunst des geschickten Zählens

Die Kombinatorik kann man als die Kunst des geschickten Zählens bezeichnen. Typische Fragestellungen sind, wie man die Anzahl Anordnungen einer Menge von Gegenständen oder die Anzahl Möglichkeiten eine Teilmenge aus einer Menge von Gegenständen auszuwählen bestimmt. Die Antwort hängt einerseits davon ab, ob man alle Gegenstände als unterscheidbar oder aber gewisse Gegenstände als ununterscheidbar betrachtet, und andererseits davon, ob die Reihenfolge der Auswahl wichtig ist oder nicht.

1.2 Kombinatorische Explosion

Weil die Anzahl Möglichkeiten bei wachsender Anzahl Gegenstände sehr schnell wächst, spricht man von der *kombinatorischen Explosion*. Nimmt man beispielsweise unser Alphabet mit den sechsundzwanzig Buchstaben, so kann man genau 26 Wörter mit einem Buchstaben, $26^2 = 676$ Wörter mit zwei Buchstaben und $26^3 = 17\,576$ Wörter mit drei Buchstaben bilden. Die Anzahl Möglichkeiten wächst schnell, und mit acht Buchstaben kann man bereits über 200 Milliarden Wörter bilden.

2 Reihenfolgen

2.1 Produktregel

Bei der Kombinatorik geht es um die Anzahl möglicher Entscheidungen. Will man zum Beispiel eine rote, eine blaue und eine grüne Kugel in eine Reihenfolge bringen, so muss man sich entscheiden, welche Kugel an welchen Platz gelegt wird. Entscheidet man sich dafür, die rote Kugel in die Mitte zu legen, so bleibt noch der Entscheid, ob man die blaue Kugel links und die grüne rechts platzieren will oder umgekehrt.

Sind r Entscheidungen zu treffen, und lässt die i-te Entscheidung m_i Möglichkeiten zu, so erhält man die Anzahl n aller Möglichkeiten durch $n = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_r$. Das ist die *Produktregel* der Kombinatorik.

Beispiel:
Will man eine rote, eine blaue und eine grüne Kugel auf drei mögliche Plätze verteilen, so hat man für den ersten Platz drei Möglichkeiten, weil man aus den drei Kugeln eine auswählen kann. Für den zweiten Platz hat man noch zwei Möglichkeiten unter den beiden noch nicht gelegten Kugeln eine auszuwählen. Damit bleibt für die letzte Kugel zwangsläufig der letzte Platz übrig. Es gibt somit sechs Möglichkeiten, die drei Kugeln auf die drei Plätze zu verteilen.

Beispiel:
Wie viele dreistellige Zahlen ohne zwei gleiche Ziffern gibt es? Weil dreistellige Zahlen nicht mit der Ziffer 0 beginnen können, hat man neun Möglichkeiten, die erste Ziffer aus den Ziffern 1 bis 9 auszuwählen. Für die zweite Ziffer bleiben wieder neun Möglichkeiten, weil zwar die bereits gewählte Ziffer wegfällt, dafür aber die 0 dazu kommt. Für die dritte Ziffer gibt es noch acht Möglichkeiten. Damit ist die Anzahl dreistelliger Zahlen ohne zwei gleiche Ziffern $n = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Jeder Entscheid, den man fällt, fügt einen Faktor zur Anzahl Möglichkeiten hinzu. Wenn man also die Anzahl Möglichkeiten bei jedem einzelnen Entscheid kennt, kann man daraus die Anzahl aller Möglichkeiten berechnen.

2.2 Fakultät

Will man m unterscheidbare Objekte in eine Reihenfolge bringen, so hat man für den ersten Platz in der Reihenfolge m Möglichkeiten, für den zweiten Platz $m-1$ Möglichkeiten und so weiter. Mit jedem Objekt, das man einordnet, reduziert man die Möglichkeiten für den nächsten Schritt um eins. Es gibt somit $n = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten für die Reihenfolge.

Dieses Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n nennt man *Fakultät* und schreibt $n!$ dafür. Es gilt

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i \qquad\qquad n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{für } n > 0 \end{cases} \tag{1}$$

links explizit und rechts rekursiv definiert.

2.3 Permutationen

Nach (1) lassen sich n Objekte auf $n!$ verschiedene Arten in eine Reihenfolge bringen. Um eine andere Reihenfolge zu erzeugen, braucht man die Objekte nicht erst wegzunehmen, sondern kann die zweite Reihenfolge durch Vertauschen von Objekten erzeugen. Die Veränderung der Reihenfolge einer Anzahl Objekte nennt man eine *Permutation*. Es gibt somit $P(n) = n!$ mögliche Permutationen von n Objekten.

Jede mögliche Reihenfolge lässt sich aus einer gegebenen Reihenfolge nicht nur durch Vertauschen beliebiger Elemente, sondern auch durch Vertauschen von benachbarten Elementen erzeugen. Um von einer bestimmten Anordnung zu einer gegebenen anderen Anordnung zu kommen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Braucht man aber für einen Weg eine gerade Anzahl Vertauschungsschritte, so braucht man für jeden anderen Weg ebenfalls eine gerade Anzahl Vertauschungsschritte.

Beispiel:
Die Buchstaben a, b und c lassen sich auf die sechs verschiedene Arten abc, acb, bac, bca, cab, cba anordnen.

3 Variationen und Kombinationen

3.1 Anordnungen von Teilmengen

Für Anordnungen von k Objekten aus einer Menge von n Objekten gibt es zwei Unterscheidungsmerkmale:

1. Die Reihenfolge der k Objekte ist wichtig oder unwichtig.
2. Das gleiche der k Objekte kann nur einmal oder mehrfach vorkommen.

Ist die Reihenfolge wichtig, spricht man von einer *Variation*, und ist die Reihenfolge unwichtig von einer *Kombination*. Kann das gleiche Objekt mehrfach vorkommen, so spricht man von *Wiederholung*.

3.2 Variationen ohne Wiederholung

Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n Objekten auswählen und in eine Reihenfolge bringen? Für das erste Objekt, das man auswählt, hat man n Möglichkeiten, für das zweite Objekt noch $n-1$ Möglichkeiten und so weiter, bis man alle k Objekte ausgewählt hat. Es gilt somit

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2}$$

für die Anzahl Variationen ohne Wiederholung. Offensichtlich gilt $P(n) = V(n,n)$.

Beispiel:
Wie viele vierstellige Zahlen bestehend aus den Ziffern 1 bis 9, ohne dass eine Ziffer mehrmals vorkommt, gibt es? Für den ersten Entscheid hat man 9 Möglichkeiten, für die zweiten noch 8, für den dritten 7 und für den vierten 6. Es gibt also $V(4,9) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ verschiedene vierstellige Zahlen dieser Art.

3.3 Variationen mit Wiederholung

Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n Objekten auswählen, wenn man dasselbe Objekt mehrmals wählen kann? Für alle k Entscheide hat man n Möglichkeiten zur Auswahl, sodass

$$\overline{V}(k,n) = n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^k \tag{3}$$

für die Anzahl Variationen mit Wiederholung gilt.

Beispiel:
Wie viele Wörter mit fünf Buchstaben gibt es? Für alle fünf Entscheide bei der Wahl eines Buchstabens hat man 26 Möglichkeiten, sodass man $\overline{V}(5,26) = 26^5 = 11\,881\,376$ Wörter der Länge 5 bilden kann. Um sie aufzuzählen, kann man bei AAAAA beginnen, mit AAAAB und AAAAC weiterfahren und mit ZZZZZ aufhören, was aber wegen der grossen Anzahl recht lange dauern dürfte.

3.4 Kombinationen ohne Wiederholung

Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n Objekten auswählen, ohne dasselbe Objekt mehrmals auszuwählen, und ohne dass es auf die Reihenfolge ankommt? Wenn es auf die Reihenfolge ankommt, hat man $V(k,n)$ Möglichkeiten. Weil es aber nicht auf die Reihenfolge ankommt, bekommt man wegen (1) auf $k!$ Arten dieselben k Objekte. Damit gilt mit (2)

$$C(k,n) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{4}$$

für die Anzahl Kombinationen ohne Wiederholung. Weil nach Entnahme von k Objekten noch $n-k$ Objekte zurückbleiben, ist offensichtlich $C(n-k,n) = C(k,n)$.

Beispiel:
$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5$ folgt daraus, dass k der n Faktoren $(a+b)$ den Faktor a und $n-k$ den Faktor b zum Summanden mit a^kb^{n-k} im ausmultiplizierten Resultat beitragen. Die Anzahl Kombinationen ohne Wiederholung kann somit auch mit dem Pascal'schen Dreieck bestimmt werden.

Beispiel:
In einer Ebene liegen 100 Punkte. Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, ist ein Kreis bestimmt. Wie viele verschiedene Kreise sind durch diese 100 Punkte höchstens bestimmt? Man kann drei beliebige Punkte auswählen und durch sie, falls sie nicht auf einer Geraden liegen, einen Kreis legen. Weil mehr als drei Punkte auf demselben Kreis liegen können, muss somit nicht durch jede Dreiergruppe von Punkten ein neuer Kreis entstehen. Somit gibt es höchstens $C(3,100) = 161\,700$ verschiedene Kreise.

3.5 Kombinationen mit Wiederholung

Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n Objekten auswählen, ohne dass es auf die Reihenfolge ankommt, wenn dasselbe Objekt mehrmals ausgewählt werden kann? Es gilt

$$\overline{C}(k,n) = \binom{n+k-1}{k} \tag{5}$$

für die Anzahl Kombinationen mit Wiederholung.

Diese Formel kann man leicht beweisen. Wenn man die n Objekte, aus denen k ausgewählt werden sollen, als in irgendeiner Weise sortiert hingelegt vorstellt, so kann man die Zwischenräume zwischen ihnen mit dem Zeichen | markieren und unter die n Objekte zwischen diesen Markierungen für jedes ausgewählte Objekt ein Zeichen $*$ schreiben. Somit stehen nach der Auswahl der k Objekte unter den n Objekten $n-1$ Zeichen | und k Zeichen $*$, also insgesamt $n+k-1$ Zeichen. Diese Zeichenfolge kodiert die Auswahl der k Objekte, und man hat $C(k, n+k-1)$ Möglichkeiten festzulegen, welche der $n+k-1$ Zeichen $*$ sind. Die übrigen $n-1$ Zeichen sind dann die | als Trennzeichen.

Das macht man sich am besten an einem Beispiel klar. Die nebenstehende Abbildung zeigt die sechs Objekte A bis F, aus denen vier Objekte mit Wiederholung ausgewählt werden können. Die gezeigte Zeichenfolge $*|||**|*|$ besagt, dass ein A, kein B, kein C, zwei D, ein E und kein F ausgewählt worden sind.

A B C D E F
* | | |**| * |

4 Anwendungen

4.1 Spielkarten

Bei den Schweizer Jasskarten gibt es 36 Karten mit vier Farben. Bei einer der üblichsten Spielformen spielen vier Personen mit, und die Karten werden anfänglich gemischt und so verteilt, dass jeder Spieler neun Karten bekommt.

Wie viele Ausgangssituationen gibt es für einen Spieler, wenn die Karten verteilt sind? Weil die Reihenfolge, in der die Karten verteilt werden, keine Rolle spielt und jede Karte nur einmal vorkommt, rechnet man hier mit Kombinationen ohne Wiederholung gemäss (4). Es gibt $C(9, 36) = \dfrac{36!}{9!27!} = \dbinom{36}{9} = 94\,143\,280$ Möglichkeiten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, neun Karten derselben Farbe zu bekommen? Weil es vier Farben gibt, und es auf die Reihenfolge nicht ankommt, gibt es 4 Möglichkeiten.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, in den 9 Karten 4 Asse zu haben? Das ist die Anzahl der Möglichkeiten, neben den 4 Assen noch 5 andere Karten aus den verbleibenden 32 Karten auszuwählen. Es gibt also $C(5, 32) = \dbinom{32}{5} = 201\,376$ Möglichkeiten.

4.2 Würfel

Wenn man statt mit Spielkarten zu spielen mit einem Würfel würfelt, so stellen sich auch verschiedene Fragen. Wie viele Möglichkeiten gibt es beispielsweise, wenn man mit einem Würfel nacheinander dreimal würfelt? Weil hier dieselbe Augenzahl mehrmals vorkommen kann, benutzt man die Formel (3) und bekommt $\overline{V}(3, 6) = 6^3 = 216$.

Würfelt man nicht mit einem Würfel mehrmals, sodass die Reihenfolge eine Rolle spielt, sondern mit drei ununterscheidbaren Würfeln gleichzeitig, so lässt sich (5) anwenden, und man erhält die $\overline{C}(3, 6) = 56$ in der nebenstehenden Abbildung gezeigten Möglichkeiten. Die Würfel sind nach Augenzahl sortiert angeordnet. In der obersten Reihe sind alle Würfe mit mindestens einer Eins. Das sind $6+5+4+3+2+1$ Möglichkeiten. In der nächsten Reihe sind alle Würfe ohne eine Eins aber mit mindestens einer Zwei. Das sind $5+4+3+2+1$ Möglichkeiten. So geht das weiter, bis in der letzten Reihe nur noch eine Anordnung mit dreimal der Augenzahl Sechs ist. Es gibt insgesamt $1\cdot 6+2\cdot 5+3\cdot 4+4\cdot 3+5\cdot 2+6\cdot 1 = 56$ Anordnungen wie schon mit der Formel (5) gefunden.