Eigenschaften von natürlichen Zahlen

Rainer Hauser

Februar 2015

1 Arithmetik natürlicher Zahlen

1.1 Zählen und Messen

Zwei fundamentale Tätigkeiten, für die wir Menschen Zahlen benutzen, sind einerseits das *Zählen* von Gegenständen und andererseits das *Messen* von Grössen. Diese beiden Tätigkeiten sind verschieden, auch wenn es auf den ersten Blick so aussieht, als zähle man beim Messen einer Länge die Anzahl Längen eines Meterstabs, die es braucht, um die zu bestimmende Länge ganz abzudecken. Beim Zählen bleibt man immer im Bereich der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$, weil es beispielsweise nie 7.25 Personen in einem Zimmer hat, während man es beim Messen meistens mit gebrochenen Zahlen zu tun hat, weil beispielsweise eine Person selten genau zwei Meter gross ist.

Beim Zählen beginnt man bei Eins und addiert immer Eins dazu, bis man die zu zählende Anzahl bestimmt hat. Zählen kann man aber auch ohne Namen für Zahlen. Legt man beispielsweise am Morgen immer einen Kieselstein in eine Tonschale, wenn ein Schaf den Stall verlässt, und nimmt am Abend für jedes Schaf, das in den Stall zurückkehrt, wieder einen Kieselstein aus der Tonschale, so weiss man genau, ob am Ende des Tages wieder gleich viele Schafe im Stall sind, wie es an Anfang des Tages waren, obwohl man für diese Anzahl Schafe möglicherweise keinen sprachlichen Ausdruck hat.

1.2 Grundoperationen

Statt immer Eins zu einer Zahl hinzuzuzählen, um einen bestimmten Wert zu finden, kann man zwei natürliche Zahlen auch addieren. So ergibt $5 + 7 = 12$. Die *Addition* zweier natürlicher Zahlen liefert als Resultat wieder eine natürliche Zahl. Bei der Subtraktion als Umkehroperation der Addition ist das jedoch nicht mehr immer der Fall. So führt beispielsweise $5 - 7$ zu einer negativen Zahl.

Statt mehrmals dieselbe Zahl zusammenzuzählen, um einen bestimmten Wert zu finden, kann man zwei natürliche Zahlen auch multiplizieren. So ergibt $5 \cdot 7 = 35$. Die *Multiplikation* zweier natürlicher Zahlen liefert als Resultat wieder eine natürliche Zahl. Bei der Division als Umkehroperation der Multiplikation ist das jedoch nicht mehr immer der Fall. So führt beispielsweise $5 \div 7$ zu einer gebrochenen Zahl.

Statt mehrmals dieselbe Zahl zusammenzumultiplizieren, um einen bestimmten Wert zu finden, kann man *Potenzen* benutzen. So ergibt $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Für Potenzen gilt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für alle natürlichen Zahlen m, n und a, sodass man auch mit Potenzen innerhalb von $\mathbb{N}$ bleibt. Besonders oft kommen Potenzen von zehn vor. Die Zahl 10^n für $n \in \mathbb{N}$ ist eine Eins gefolgt von n Nullen.

Kompliziertere Berechnungen mit den Grundoperationen benötigen Klammern, um die Reihenfolge festzulegen, in denen die Operationen ausgeführt werden. Als *Konvention* hat sich die Regel "Punkt vor Strich" etabliert, sodass man statt $(3 \cdot 4) + 5$ einfacher $3 \cdot 4 + 5$ schreiben darf.

1.3 Gesetze

Die Addition und die Multiplikation erfüllen je das *Kommutativgesetz*, sodass $a+b = b+a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ für alle Zahlen a und b gilt. Für beide Operationen gilt zudem auch je das *Assoziativgesetz*, sodass

$(a+b)+c = a+(b+c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle Zahlen a, b und c gilt, und man einfach $a+b+c$ beziehungsweise $a \cdot b \cdot c$ schreiben kann. Daneben gibt es die beiden *Distributivgesetze*, die besagen, dass $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ beziehungsweise $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ gilt. Wenn das eine dieser beiden Gesetze und das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt, folgt daraus das andere dieser beiden Gesetze.

2 Darstellung von natürlichen Zahlen

2.1 Mengen von Dingen

Die Anzahl von Dingen ist eine Eigenschaft, die unabhängig davon ist, mit welchen Dingen man es zu tun hat. Wenn der Hirte sicher sein will, dass am Abend gleich viele Schafe in den Stall gehen, wie ihn am Morgen verlassen haben, so kann er das wie oben beschrieben mit den Kieselsteinen und der Tonschale herausfinden. Dazu braucht er nicht zu wissen, dass er fünfundzwanzig Schafe hat. Fünfundzwanzig Kieselsteine repräsentieren also in gewissem Sinne die Zahl 25.

Man kann die Zahl 25 beispielsweise durch fünfundzwanzig Striche darstellen. Das ist für grosse Zahlen keine sehr effiziente Repräsentation, aber für kleine Zahlen ist sie durchaus praktikabel. Beim Kartenspiel schreibt man manchmal auf einer Schiefertafel vier Striche, die man mit dem fünften Strich durchstreicht, um so die Zahl 5 zu repräsentieren und als Fünfergruppe optisch hervorzuheben. Die Zahlen in Keilschrift wie auch die römischen Zahlen sind sicher auf ähnliche Weise entstanden.

2.2 Symbole für natürliche Zahlen

Die Römer benutzten Buchstaben, um Zahlen darzustellen. Die ersten fünf natürlichen Zahlen werden als I, II, III, IV und V geschrieben. Die Zahl 4 wird also durch $5-1$ mit dem Einerstrich I links von Fünfersymbol V repräsentiert, während bei der 6 der Einerstrich I rechts vom Fünfersymbol V steht und somit $5+1$ meint. (Man beachte, dass auf den Zifferblättern von Uhren die Zahl 4 jeweils als IIII geschrieben wird.) Auf ähnliche Weise wird die Zahl 10 durch X, die Zahl 100 durch C und die Zahl 1000 durch M dargestellt. Man kann jetzt durch das Nebeneinanderstellen dieser Symbole Zahlen bis ein paar Tausend darstellen. Das System hat jedoch die Schwierigkeit, dass es nicht skaliert, denn für jede nächste Zehnerpotenz braucht es ein neues Zeichen.

Wir benutzen die von Indien via Arabien übernommenen so genannten arabischen Zahlen mit den Ziffern 0 bis 9 und damit das Dezimalsystem, das ein Stellenwertsystem ist und weiter unten beschrieben wird. Das hat den Vorteil, dass man mit diesen zehn Ziffern theoretisch alle natürlichen Zahlen darstellen kann. Praktisch ginge einem aber irgendwann die Tinte, die Zeit oder – am wahrscheinlichsten – die Geduld aus, wenn man eine sehr grosse Zahl schreiben müsste.

2.3 Namen von natürlichen Zahlen

Natürliche Zahlen haben Namen. Die ersten zwölf Zahlen haben eigene Namen bekommen. Ab dreizehn sind die Namen so aus Bestandteilen zusammengesetzt, dass man grössere Zahlen benennen könnte, als man sie je braucht. Die Zahl 10^6 heisst Million, und die Zahl 10^9 heisst Milliarde. Fügt man einer Milliarde drei weitere Nullen hinzu, bekommt man eine Billion. So geht es weiter zu Billiarde, Trillion, Trilliarde und so weiter bis zu einer Dezilliarde. Obwohl eine Dezilliarde schon dreiundsechzig Nullen hat, geht es über Undezillion, Undezilliarde, Duodezillion in zahlreichen Tausenderschritten bis zu einer Zentilliarde, die schon über sechshundert Nullen hat. Von dort ginge es theoretisch gar noch weiter.

Dieses System nennt man das System der langen Leiter. Daneben gibt es noch das System der kurzen Leiter, das in praktisch allen englischsprachigen Ländern benutzt wird. Darin geht es von der Million in einem Tausenderschritt direkt zur Billion. Die Millliarde, Billiarde und so weiter gibt es nicht. Diese widersprüchliche Benutzung der gleichen Namen kann offensichtlich zu Missverständnissen führen, was teuer werden kann, wenn es um Geld geht.

Statt den Namen Million, Milliarde und so weiter benutzt man vor allem in der Wissenschaft lieber Ausdrücke wie "zehn hoch sechs". So wäre eine Dezilliarde 10^{63} und eine Zentilliarde 10^{603}. Das macht auch das Rechnen einfacher, denn die Namen müsste man erst in eine Eins und die richtige Anzahl Nullen übersetzen, um damit rechnen zu können, denn die wenigsten Leute wissen auswendig, wie viele Nullen beispielsweise eine Oktilliarde hat.

2.4 Stellenwertsysteme

Wir benutzen im Alltag das *Dezimalsystem*, das jede natürliche Zahl mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 darstellt. Weil die Bedeutung oder der Wert einer Ziffer in einer Zahl von der Stelle in der Zahl abhängt, nennt man solche Zahlensysteme *Stellenwertsysteme*. Die Ziffer 1 in 21 bedeutet den Wert 1, während sie in 12 den Wert 10 bedeutet. Stellt z_i eine Ziffer zwischen 0 und 9 dar, so lässt sich jede natürliche Zahl n im Dezimalsysten durch

$$n = z_m \cdot 10^m + z_{m-1} \cdot 10^{m-1} + ... + z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10^1 + z_0 \cdot 10^0$$

darstellen. Es gilt beispielsweise $17023 = 1 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$, wenn man die Zehnerpotenzen wie etwa 10^4 durch ihren Zahlenwert 10000 ersetzt. Im Dezimalsystem ist die Basis die Zahl 10, und die Werte der Stellen sind Ziffern multipliziert mit Zehnerpotenzen.

Neben dem Dezimalsystem sind auch das Binär-, das Oktal- und das Hexadezimalsystem gebräuchlich. Im Binärsystem gibt es nur die Ziffern 0 und 1, und die Basis ist die Zahl 2. Man zerlegt also eine Zahl nicht wie im Dezimalsystem in Einer, Zehner, Hunderter, Tausender und so weiter, sondern in Einer, Zweier, Vierer, Achter und so weiter. Im Oktalsystem benutzt man die Ziffern 0 bis 7 und die Basis 8, sodass eine Zahl in Einer, Achter, Vierundsechziger und so weiter zerlegt wird, und im Hexadezimalsystem ist die Basis 16. Weil man im Dezimalsystem mit nur zehn Ziffern auskommt, im Hexadezimalsystem jedoch sechzehn Ziffern benötigt werden, benutzt man neben den Ziffern 0 bis 9 noch die Buchstaben a bis f.

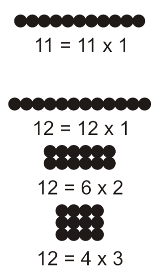
Allgemein gilt, dass es für die Basis $b \in \mathbb{N}$ immer b verschiedene Ziffern braucht, dass $b \geq 2$ sein muss, und dass eine natürliche Zahl n durch

$$n = z_m \cdot b^m + z_{m-1} \cdot b^{m-1} + ... + z_2 \cdot b^2 + z_1 \cdot b^1 + z_0 \cdot b^0$$

dargestellt wird. Weil als Ziffern soweit möglich die bekannten Ziffern des Dezimalsystems benutzt werden, und so nicht klar ist, welche Zahl 17023 darstellt, setzt man die Basis b als Index hinter die Zahl. So ist 17023_8 die Zahl $1 \cdot 8^4 + 7 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$, was 7699 im Dezimalsystem entspricht. Je kleiner die Basis ist, desto länger wird offensichtlich die Darstellung einer natürlichen Zahl. So entspricht die oktale Zahl 17023_8 der binären Zahl 1111000010011_2 und der hexadezimalen Zahl $1e13_{16}$.

3 Primfaktorzerlegung

3.1 Teiler und Vielfache



Gewisse natürliche Zahlen wie die Zahl 11 lassen sich nicht in gleich grosse Teile zerlegen, während andere Zahlen wie die Zahl 12 in gleich grosse Teil zerlegt werden können, wie das die nebenstehende Abbildung zeigt. Die Zahl 12 kann in zwei Teile der Länge 6, in drei Teile der Länge 4, in vier Teile der Länge 3 und in sechs Teile der Länge 2 zerlegt werden. Man sagt, die Zahlen 2, 3, 4 und 6 seien Teiler von 12. Weil man die Zahl 11 einerseits in einen Teil der Länge 11 und andererseits in elf Teile der Länge 1 zerlegen kann, sind 1 und 11 Teiler von 11 und entsprechend 1 und 12 auch Teiler von 12.

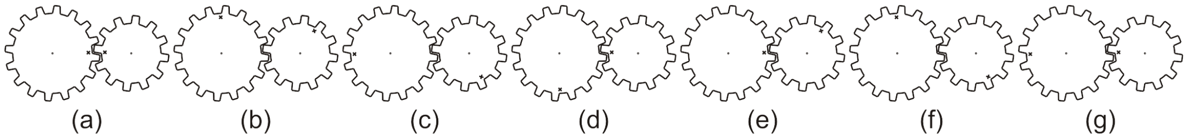
Die natürliche Zahl m ist genau dann ein *Teiler* der natürlichen Zahl n, wenn das Resultat der Division $n \div m$ eine natürliche Zahl ist. So ist 5 beispielsweise ein Teiler von 20, da die Division $20 \div 5 = 4$ eine natürliche Zahl ergibt, während 6 kein Teiler von 20 ist, da die Division $20 \div 6 = \frac{10}{3}$ eine gebrochene und keine natürliche Zahl ist. Jede natürliche Zahl n hat nur endliche viele Teiler, wobei 1 und n immer dazu gehören. Die Menge aller Teiler der Zahl n nennt man die *Teilermenge* von n und bezeichnet sie mit $\mathbb{T}_n$. Somit gilt $\mathbb{T}_{11} = \{1, 11\}$ und $\mathbb{T}_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Neben den Teilern einer natürlichen Zahl n kann man auch die *Vielfachen* der Zahl n betrachten. Weil für jede natürliche Zahl m die natürliche Zahl $m \cdot n$ ein Vielfaches von n ist, gibt es zu jeder Zahl n unendlich viele Vielfache. Die Zahlen 12, 24, 36, 48, 60 sind die kleinsten Vielfachen der Zahl 12.

Jede natürliche Zahl n ist offensichtlich ihr grösster Teiler und ihr kleinstes Vielfaches. Hat man zwei natürliche Zahlen n und m, so haben diese gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache. Die Zahl 1 ist sicher ein gemeinsamer Teiler, und die Zahl $n \cdot m$ ist sicher ein gemeinsames Vielfaches. Die zwei Zahlen n und m haben einen *grössten gemeinsamen Teiler*, den man mit $\mathrm{ggT}(n, m)$ bezeichnet, und ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches*, das man mit $\mathrm{kgV}(n, m)$ bezeichnet.

Beispiel:
Die Zahlen 12 und 15 haben die Teiler $\mathbb{T}_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ und $\mathbb{T}_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$, womit man direkt ablesen kann, dass $\mathrm{ggT}(12, 15) = 3$ gilt. Um $\mathrm{kgV}(12, 15)$ zu bestimmen, kann man die ersten Vielfachen beider Zahlen auflisten, bis man ein gemeinsames Vielfaches findet. Die Zahlen 12, 24, 36, 48, 60, 72 und so weiter sind Vielfache von 12. Die Zahlen 15, 30, 45, 60, 75 und so weiter sind Vielfache von 15. Die erste Zahl in beiden Listen ist somit 60, und es gilt $\mathrm{kgV}(12, 15) = 60$.

Weil für alle natürlichen Zahlen n und m gilt, dass $n \cdot m = \mathrm{ggT}(n, m) \cdot \mathrm{kgV}(n, m)$ ist, lässt sich das kleinste gemeinsame Vielfache einfach finden, wenn man den grössten gemeinsamen Teiler kennt. Die folgende Abbildung zeigt eine Veranschaulichung von ggT und kgV durch Zahnräder. Das grössere Zahnrad hat 16 Zähne und das kleinere 12. In (a) stehen die beiden Zahnräder so, dass die Markierungen beieinander liegen. Dreht man das grosse Zahnrad um 90° im Gegenuhrzeigersinn, so dreht das kleine Zahnrad wie in (b) gezeigt um 120° im Uhrzeigersinn. In (c) hat sich das grosse Zahnrad um 180°, in (d) um 270° und in (e) um 360° gedreht, sodass sich die Markierung darauf jetzt wieder am ursprünglich Ort befindet. Das kleine Zahnrad hat sich hingegen in (c) um 240° und in (d) um 360° gedreht, sodass sich dessen Markierung schon jetzt am ursprünglichen Ort befindet. In (f) befindet sich das kleine Zahnrad in der selben Position wie in (c) und das grosse wie in (b), während sich das kleine Zahnrad in (g) bereits zweimal ganz gedreht hat.



Überlegt man sich, wie sich die Zahnräder drehen, so sieht man, dass sich das grosse Zahnrad in 4 solchen Schritten einmal ganz dreht, während sich das kleine Zahnrad in 3 solchen Schritten einmal ganz dreht. Weil $\mathrm{kgV}(4, 3) = 12$ gilt, hat nach zwölf solchen Schritten das grosse Zahnrad drei ganze Umdrehungen und das kleine Zahnrad vier ganze Umdrehungen gemacht, sodass sich die beiden Markierungen wieder am ursprünglichen Ort befinden. Betrachtet man die Frage, nach wie vielen Umdrehungen sich die Markierungen auf beiden Zahnrädern wieder am ursprünglichen Ort befinden, von den Zähnchen aus, so sieht man, dass sich das grosse Zahnrad bei einer ganzen Umdrehung um 16 Zähnchen vorwärts bewegt hat, während sich das kleine Zahnrad pro Umdrehung um 12 Zähnchen vorwärts bewegt. Wegen $\mathrm{kgV}(16, 12) = 48$ muss man also beide Zahnräder um 48 Zähnchen vorwärts drehen, bis wieder beide Markierungen am ursprünglichen Ort sind.

3.2 Primzahlen

Wie oben besprochen besitzt jede natürliche Zahl n einerseits 1 und andererseits n als Teiler. Besitzt eine Zahl n mit $n \geq 2$ nur 1 und n als Teiler, so nennt man sie eine *Primzahl*. Die ersten Primzahlen sind also 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 und so weiter, und die Zahl 2 ist offensichtlich die einzige gerade Primzahl. Die Zahl 1 wird nicht zu den Primzahlen gezählt.

Will man sämtliche Primzahlen von 2 bis beispielsweise 100 finden, so kann man die Methode, die als das *Sieb des Eratosthenes* in die Geschichte eingegangen ist, benutzen. Dazu schreibt man alle natürlichen Zahlen in diesem Intervall auf. Die erste Zahl ist 2, und die markiert man als eine Primzahl, streicht aber alle Vielfachen davon wie 4, 6, 8 und so weiter bis 100, die keine Primzahlen sein können. Die nächste nicht durchgestrichene Zahl ist 3, und man markiert sie wieder als Primzahl, streicht aber alle Vielfachen davon wie 6, 9, 12 und so weiter bis 99, die wiederum keine Primzahlen sein können. Das die Zahl 6 bereits durchgestrichen ist, stört nicht. Die nächste nicht durchgestrichene Zahl ist 5, weil 4 als Vielfaches von 2 gestrichen worden ist. Somit markiert man 5 als Primzahl und streicht alle seine Vielfachen von 10, 15 und so weiter bis 100. So fährt man fort, bis man keine Vielfachen mehr streichen kann. Die so gefundenen und als Primzahlen markierten Zahlen sind alle Primzahlen zwischen 2 und 100. Statt 100 als grösste Zahl kann man irgendeine natürliche Zahl benutzen und findet auf diese Weise sämtliche Primzahlen bis zu dieser Zahl.

Um festzustellen, ob eine bestimmte natürliche Zahl n eine Primzahl ist, kann man der Reihe nach ausprobieren, ob sie durch 2, durch 3, durch 5, durch 7, durch 11 und so weiter teilbar ist. Hat man das mit allen Primzahlen bis zur Primzahl m mit $m^2 \geq n$ ausprobiert und ist keine dieser Primzahlen Teiler von n, so muss n selber eine Primzahl sein. Es ist somit nützlich, schnell feststellen zu können, ob eine gegebene natürliche Zahl durch eine bestimmte Primzahl teilbar ist.

3.3 Teilbarkeitsregeln

Für gewisse Primzahlen gibt es Regeln, mit denen man schnell ohne langwierige Division feststellen kann, ob eine Zahl durch diese Primzahl teilbar ist. Sie beruhen darauf, dass man von einer Zahl einen grossen Teil subtrahieren kann, von dem man weiss, dass er sicher durch die gesuchte Zahl teilbar ist. Im Folgenden werden solche Teilbarkeitsregeln für die Primzahlen 2, 3, 5, 7 und 11 vorgestellt.

Teilbarkeit durch 2:
Im Dezimalsystem ist es einfach festzustellen, ob eine natürliche Zahl durch 2 teilbar ist. Man muss dazu nur die hinterste Ziffer anschauen. Ist diese 0, 2, 4, 6 oder 8, so ist die Zahl durch 2 teilbar.

Teilbarkeit durch 3:
Weil $10^n - 1$ im Dezimalsystem immer diejenige Zahl ist, die aus n Ziffern 9 besteht, und die somit sowohl durch 3 als auch durch 9 teilbar ist, muss der Rest auch durch 3 beziehungsweise 9 teilbar sein, wenn die ganze Zahl durch 3 beziehungsweise durch 9 teilbar ist. Die Zahl $756 = 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ beispielsweise kann zu $(7 \cdot 99 + 7) + (5 \cdot 9 + 5) + 6 = (7 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + 7 + 5 + 6$ umgeformt werden. Der Teil in der Klammer ist durch 3 und durch 9 teilbar. Somit muss auch die Quersumme $7 + 5 + 6 = 18$ durch 3 beziehungsweise 9 teilbar sein, damit 756 durch 3 beziehungsweise 9 teilbar ist. Das ist so, und es gilt $756 = 3 \cdot 3 \cdot 84$.

Teilbarkeit durch 5:
Wie bei Teilbarkeit durch 2 ist auch Teilbarkeit durch 5 im Dezimalsystem sofort feststellbar, was daran liegt, dass $10 = 2 \cdot 5$ gilt. Ist die hinterste Ziffer 0 oder 5, so ist die Zahl durch 5 teilbar.

Teilbarkeit durch 7:
Weil eine natürliche Zahl n im Dezimalsystem leicht als $n = 10 \cdot a + b$ geschrieben werden kann, indem man als b die hinterste Ziffer und als a die übrigen Ziffern nimmt, und weil $2 \cdot n = 20 \cdot a + 2 \cdot b = 21 \cdot a - (a - 2 \cdot b)$ gilt, muss man nur überprüfen, ob $a - 2 \cdot b$ durch 7 teilbar ist, um zu schauen, ob n durch 7 teilbar ist. Statt 17304 kann man $1730 - 2 \cdot 4 = 1722$ überprüfen. Das ist immer noch nicht einfach, und man wendet denselben Trick nochmals an. Statt 1722 prüft man $172 - 2 \cdot 2 = 168$. Wegen $168 = 140 + 28$ ist also 17304 durch 7 teilbar, und es gilt $17304 = 7 \cdot 2472$.

Teilbarkeit durch 11:
Weil $10^n - 1$ aus n Ziffern 9 besteht, was für gerade n durch 11 teilbar ist, und weil $10^n + 1$ für ungerade n durch 11 teilbar ist, kann man mit der alternierenden Quersumme feststellen, ob eine natürliche Zahl im Dezimalsystem durch 11 teilbar ist. So ist beispielsweise $10^6 - 1 = 999999$, was als $10101 \cdot 9 \cdot 11$ geschrieben werden kann, während $10^5 + 1 = 100001 = 111111 - 11110 = (10101 - 1010) \cdot 11$ ist. Damit lässt sich zum Beispiel die Zahl $10516 = 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$ alternierend als $([1 \cdot (10^4 - 1)] + 1) + ([0 \cdot (10^3 + 1)] - 0) + ([5 \cdot (10^2 - 1)] + 5) + ([1 \cdot (10^1 + 1)] - 1) + ([6 \cdot (10^0 - 1)] + 6)$ schreiben, wobei die Terme in eckigen Klammern durch 11 teilbar sind. Wenn also $1 - 0 + 5 - 1 + 6$ durch 11 teilbar ist, muss auch 10516 durch 11 teilbar sein.

Teilbarkeit durch weitere Zahlen:
Auch für weitere Zahlen wie beispielsweise 13 gibt es Teilbarkeitsregeln. Zudem werden manchmal noch Regeln für Teilbarkeit durch 4 oder 6, die keine Primzahlen sind, angegeben. Diese sind jedoch nicht nötig, weil beispielsweise Teilbarkeit durch 4 durch zweimalige Anwendung der Teilbarkeitsregel für 2 nachgewiesen werden kann.

Bemerkungen:
Die Teilbarkeitsregeln für 2 und 5 kommen daher, dass 2 und 5 Teiler der Basis 10 sind. Auch die Regeln für 9 und 11 haben ihren Grund im Dezimalsystem, da $9 = 10 - 1$ und $11 = 10 + 1$ ist. Im Fünfersystem

beispielsweise, also im System mit den Ziffern 0 bis 4 und der Basis 5, liesse sich nicht mehr einfach an der hintersten Ziffer ablesen, ob eine Zahl gerade ist oder nicht, da 2 kein Teiler der Basis 5 ist. Zufälligerweise wäre es aber trotzdem nicht sehr schwer, weil $4 = 2 \cdot 2 = 5 - 1$ gilt, womit die Zahlen 2 und 4 die Rolle der Zahlen 3 und 9 im Dezimalsystem spielen. Ist also die Quersumme einer Zahl im Fünfersystem durch 2 beziehungsweise durch 4 teilbar, so ist die Zahl selber durch 2 beziehungsweise 4 teilbar. Teilbarkeit durch $6 = 5 + 1$ könnte man wie bei der 11 im Dezimalsystem mit der alternierenden Quersumme finden.

3.4 Fundamentalsatz der Arithmetik

Eine Primzahl hat nur 1 und sich selber als Teiler. Nach dem *Fundamentalsatz der Arithmetik* lässt sich jede natürliche Zahl bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von nicht notwendigerweise verschiedenen Primzahlen darstellen. Die Darstellung einer natürlichen Zahl als Produkt von Primfaktoren nennt man die *Primfaktorzerlegung* dieser Zahl.

Beispiele:
$21 = 3 \cdot 7$, $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$, $1200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

Man kann die Primfaktorzerlegung als Folge endlicher Länge darstellen, bei der die Glieder die Exponenten der nach Grösse sortierten Primzahlen darstellen. Die erste Ziffer der Folge ist der Exponent von 2, die zweite Ziffer der Exponent von 3 und so weiter. Weil jede Primfaktorzerlegung nur endlich viele Primzahlen enthält, hat eine solche Folge auch nur endlich viele Glieder ungleich Null. Die Folge $(0, 3, 1, 0, 1)$ würde somit $2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1 = 1485$ bedeuten, könnte aber auch als $(0, 3, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ geschrieben werden. Die äquivalenten Folgen $()$, (0), $(0, 0)$ und so weiter würden dann die Zahl 1 repräsentieren, die sonst bei der Primfaktorzerlegung Schwierigkeiten macht.

Es gibt unendlich viele Primzahlen, denn wenn es nur endlich viele gäbe, könnte man das Produkt aller Primzahlen berechnen und 1 dazu addieren. Die so entstehende Zahl wäre aber dann durch keine der Primzahlen teilbar und müsste somit entweder selber eine Primzahl sein oder aber das Produkt von natürlichen Zahlen sein, die nicht zu den endlich vielen Primzahlen gehören.

Um eine natürliche Zahl in Primfaktoren zu zerlegen, gibt es verschiedene Algorithmen. Eine einfach Art ist, der Reihe nach zu überprüfen, ob die Zahl durch die Primzahlen teilbar ist. Dazu sind die Teilbarkeitsregeln nützlich.

Beispiel:
Die Zahl 295 750 ist gerade, also gilt $295\,750 = 2 \cdot 147\,875$. Die Zahl 147 875 ist weder durch 2 noch durch 3, aber durch 5 teilbar. Es gilt $147\,875 = 5 \cdot 29\,575$, $29\,575 = 5 \cdot 5915$ und $5915 = 5 \cdot 1183$. Die Teilbarkeitsregel für 7 liefert $1183 = 7 \cdot 169$, und bekanntlich ist $169 = 13^2$. Damit hat man die vollständige Primfaktorzerlegung $295\,750 = 2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13^2$ gefunden, für die man die Folge $(1, 0, 3, 1, 0, 2)$ benutzen könnte.

Dieser einfache und für nicht allzu grosse Primzahlen nützliche Algorithmus versagt, wenn ein Mensch das Produkt von zwei Primzahlen mit fünf oder mehr Stellen zerlegen möchte. Computer können dieses Problem zwar noch lösen, brauchen jedoch für noch viel grössere Primzahlen ebenfalls sehr lange. Darauf basieren heutige Verschlüsselungssysteme, mit denen geheime Nachrichten beispielsweise bei Banktransaktionen zwischen Computersystemen ausgetauscht werden.

Kennt man die Primfaktorzerlegung von zwei Zahlen, kann man deren grösster gemeinsamer Teiler und deren kleinstes gemeinsames Vielfaches bestimmen. Der grösste gemeinsame Teiler enthält alle Primfaktoren, die in beiden Zahlen vorkommen, während das kleinste gemeinsame Vielfache alle Primfaktoren enthält, die in mindestens einem der beiden Zahlen vorkommen.

Quadriert man eine natürliche Zahl, so verdoppeln sich sämtliche Exponenten in der Primfaktorzerlegung dieser Zahl. Quadriert man eine rationale Zahl, so verdoppeln sich sämtliche Exponenten in der Primfaktorzerlegung von Zähler und Nenner dieser Zahl. Das heisst aber, dass die Wurzel aus einer natürlichen Zahl nur entweder wieder eine natürliche Zahl ist, falls sämtliche Exponenten in der Primfaktorzerlegung gerade Exponenten haben, oder aber eine irrationale Zahl sein muss.