Trigonometrische Funktionen

Rainer Hauser

September 2013

1 Einleitung

1.1 Der Begriff Funktion

Eine Funktion ordnet jedem Element m_1 einer Menge $\mathbb{M}_1$ ein Element m_2 einer Menge $\mathbb{M}_2$ zu. Man schreibt dafür f: $\mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$, $m_1 \mapsto f(m_1) = m_2$ oder einfach $m_1 \mapsto f(m_1)$, falls die beiden Mengen aus dem Kontext klar sind. Manchmal schreibt man auch $x \mapsto f(x)$, $f(x)$, $x \mapsto y$ oder $f(x) = y$. Die letzten zwei Varianten benutzt man vor allem, wenn man den *Graphen* einer Funktion in einem Koordinatensystem aufzeichnen will. Die Menge $\mathbb{M}_1$ heisst *Definitionsbereich* und die Menge derjenigen Elemente m_2 von $\mathbb{M}_2$, für die es ein $m_1 \in \mathbb{M}_1$ mit $f(m_1) = m_2$ gibt, heisst *Wertebereich*.

Viele Funktionen in der Mathematik ordnen reellen Zahlen reelle Zahlen zu. Sind alle Elemente des Wertebereiches reelle Zahlen, so kann man einerseits die *Nullstellen* angeben, also diejenigen Elemente m_1 von $\mathbb{M}_1$, für die $f(m_1) = 0$ gilt, und andererseits die so genannten *Extrema* bestimmen, also diejenigen Elemente m_1 von $\mathbb{M}_1$, für die $f(m_1)$ maximal beziehungsweise minimal im Wertebereich ist.

1.2 Der Einheitskreis

Sind zwei Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben, so ist ihr Abstand $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Das folgt aus dem Satz von Pythagoras. Die Menge aller Punkte, die vom Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems den Abstand 1 haben, nennt man den *Einheitskreis*. Lässt man einen Punkt auf dem Einheitskreis wandern, so lassen sich seine Koordinaten als Funktion des Winkels im Ursprung darstellen. Das führt zu den *trigonometrischen Funktionen*.

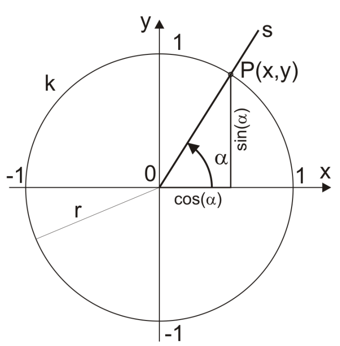
2 Die trigonometrischen Funktionen im Gradmass

2.1 Sinus und Cosinus eines Drehwinkels

Dreht man einen Strahl s im Koordinatensystem, in dem der Einheitskreis k eingezeichnet ist, um einen Winkel α, und bezeichnet man mit $P(x, y)$ den Punkt, in dem sich s und k schneiden, so ist *Sinus* und *Cosinus* durch

$$x = \cos\alpha \qquad y = \sin\alpha \tag{1}$$

über die Koordinaten des Schnittpunktes $P(x, y)$ definiert, die vom Winkel α abhängen.



Der Drehwinkel α ist der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen der positiven Seite der x-Achse und dem Strahl s. Dreht man den Strahl s, so ändert der Winkel α und der Punkt $P(x, y)$, sodass man $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ als Funktionen betrachten kann, die einem Winkel eine reelle Zahl zuordnen, und deren Wertebereiche die reellen Zahlen zwischen -1 und $+1$ sind.

Sinus und Cosinus sind Funktionen, die einem Winkel im Gradmass eine reelle Zahl zuordnen. Die Zuordnung $\alpha \mapsto \sin\alpha$ heisst *Sinusfunktion* und die Zuordnung $\alpha \mapsto \cos\alpha$ heisst *Cosinusfunktion.*

Wegen dem Satz von Pythagoras gilt $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (Es hat sich eingebürgert, dass man meist $\sin\alpha$ statt $\sin(\alpha)$ sowie $\sin^2\alpha$ statt $\sin(\alpha)^2$ schreibt.) Weiter gelten die Beziehungen

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha) \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha) \tag{2}$$

offensichtlich für Winkel zwischen 0° und 90° sowie die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 90^\circ) &= \cos(\alpha) & \cos(\alpha + 90^\circ) &= -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha + 180^\circ) &= -\sin(\alpha) & \cos(\alpha + 180^\circ) &= -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha + 270^\circ) &= -\cos(\alpha) & \cos(\alpha + 270^\circ) &= \sin(\alpha) \\ \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin(\alpha) & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos(\alpha) \end{aligned}$$

für beliebige Winkel α, wie man mit dreh- und spiegelsymmetrischen Überlegungen leicht sieht.

Weil der Strahl s nach einem Drehwinkel von 360° wie bei 0° wieder mit der positiven Seite der x-Achse zusammenfällt, gilt

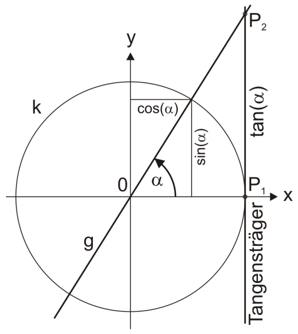
$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + n \cdot 360^\circ) \qquad \cos(\alpha) = \cos(\alpha + n \cdot 360^\circ) \tag{3}$$

für alle Winkel α und jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$. Die zwei Funktionen sind also *periodisch*, und die Periode ist 360°.

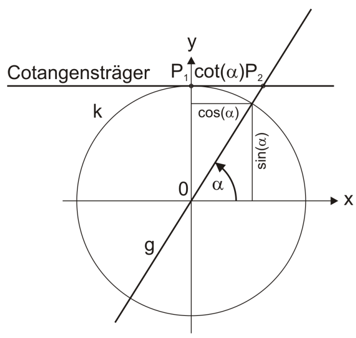
Folgende Sinus- und Cosinuswerte kann man sich mit folgendem Trick leicht merken:

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$

2.2 Tangens und Cotangens eines Drehwinkels



Tangens und Cotangens lassen sich ebenfalls mit einem Drehwinkel um den Nullpunkt definieren. Es wird aber kein Strahl, sondern die Gerade g gedreht, und die Schnittpunkte des Tangens- beziehungsweise des Cotangensträgers mit einer Koordinatenachse und mit g bestimmt, welchen Wert der Tangens beziehungsweise Cotangens annimmt.



Tangens und Cotangens sind Funktionen, die einem Winkel im Gradmass eine reelle Zahl zuordnen. Die Zuordnung $\alpha \mapsto \tan\alpha$ heisst *Tangensfunktion* und die Zuordnung $\alpha \mapsto \cot\alpha$ heisst *Cotangensfunktion.*

Aus Symmetrieüberlegungen und aus den Strahlensätzen folgt

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \tag{4}$$

für alle Winkel α. Für $\cos\alpha = 0$ und für $\sin\alpha = 0$ führen die Formeln (4) zu einer Division durch 0, und die beiden Funktionen sind somit nicht überall definiert.

Weil die Gerade g nach einem Drehwinkel von 180° wie bei 0° mit der x-Achse zusammenfällt, gilt

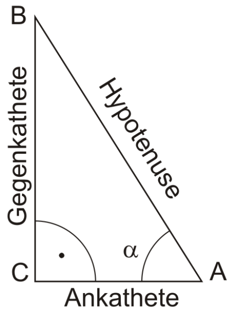
$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + n \cdot 180^\circ) \qquad \cot(\alpha) = \cot(\alpha + n \cdot 180^\circ) \tag{5}$$

für alle Winkel α und jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$. Die zwei Funktionen sind also ebenfalls *periodisch*, aber die Periode ist 180° wegen $\sin(\alpha + 180^\circ) = (-1) \cdot \sin\alpha$ und $\cos(\alpha + 180^\circ) = (-1) \cdot \cos\alpha$.

Wegen den Formeln (4) lassen sich Symmetrieeigenschaften sowie die Werte für 30°, 45° und 60° von Sinus und Cosinus ableiten. So nehmen beispielsweise die Tangens- und die Cotangensfunktion offensichtlich den Wert 1 an für $\alpha = 45°$.

2.3 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Um die Trigonometrie auch bei allgemeinen rechtwinkligen Dreiecken, in denen die Hypotenuse nicht die Länge 1, sondern die Länge c hat, anwenden zu können, müssen die Seitenlängen a und b durch c dividiert werden. (Das entspricht einer generellen Massstabänderung, bei der c die neue Einheitslänge wird.)



In einem rechtwinkligen Dreieck gibt es zwei spitze Winkel. Beide liegen zwischen einer Kathete und der Hypotenuse, sodass die andere Kathete gegenüber liegt. Deshalb spricht man in Bezug auf diese Winkel von einer *Ankathete* und einer *Gegenkathete* und definiert die trigonometrischen Funktionen mit ihrer Hilfe.

Die trigonometrischen Funktionen werden im rechtwinkligen Dreieck nicht wie in (1) durch einen Drehwinkel, sondern durch die Beziehungen

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

definiert. Ist wie üblich a die Gegenkathete, b die Ankathete und c die Hypotenuse von α, so bedeutet das

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \tag{6}$$

im rechtwinkligen Dreieck, und die Beziehungen (2) stimmen offensichtlich.

Rechtwinklige Dreiecke, bei denen zwei unabhängige Grösse (Seiten oder Winkel) gegeben sind, können nicht nur mit Zirkel und Lineal konstruiert, sondern mit den Mitteln der Trigonometrie auch berechnet werden. Dabei helfen der Satz von Pythagoras und die Umkehrfunktionen $\sin^{-1}$ und $\cos^{-1}$.

2.4 Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

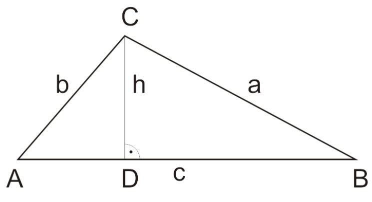
Man kann sogar jedes Dreieck, bei dem genügend Seitenlängen und Winkel gegeben sind, und die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, mit den Mitteln der Trigonometrie rechnerisch bearbeiten. Dabei gelten die folgenden drei Sätze.

In jedem Dreieck mit den Seiten a, b und c sowie den Winkeln α, β und γ gilt

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{7}$$

gemäss dem *Sinussatz*. (Im rechtwinkligen Dreieck folgt daraus die Beziehung (6) wegen $\sin 90° = 1$.)

Der Sinussatz lässt sich leicht aus (6) beweisen. Für die Winkel α bei der Ecke A und β bei der Ecke B gilt $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ und $\sin\beta = \frac{h}{a}$, woraus einerseits $h = a \cdot \sin\beta$ und andererseits $h = b \cdot \sin\alpha$ folgt.



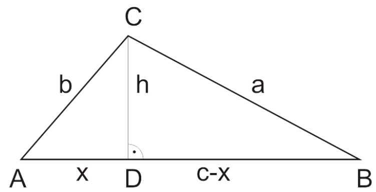
Dividiert man diese Gleichung entweder durch a und b oder durch $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ und stellt man fest, dass diese Beziehung für beliebige zwei Seiten gilt, so folgt daraus der Sinussatz.

Weiter gilt in jedem Dreieck mit den Seiten a, b und c sowie den Winkeln α, β und γ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \tag{8}$$

gemäss dem *Cosinussatz*. (Das ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.)

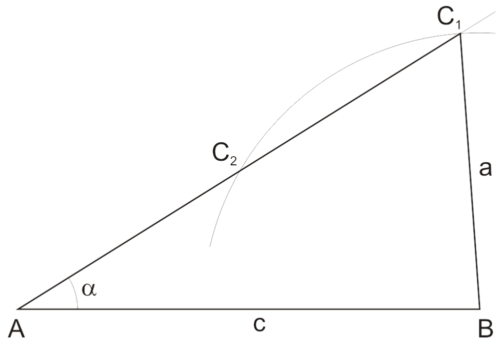
Der Cosinussatz lässt sich leicht beweisen. Mit $a^2 = h^2 + (c-x)^2$, $b^2 = h^2 + x^2$ sowie $x = b \cdot \cos\alpha$ lassen sich x und h eliminieren. Aus $a^2 = (h^2 + x^2) + c^2 - 2cx$ wird so $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.



Mit der Gleichung $b^2 = h^2 + x^2$ eliminiert man die beiden Summanden h^2 und x^2 elegant gemeinsam, und mit $x = b \cdot \cos\alpha$ eliminiert man den noch verbleibenden Faktor x in $2cx$.

Mit dem Sinus- und Cosinussatz kann man sämtliche fehlenden Seitenlängen und Winkel in einem allgemeinen Dreieck mit genügend vorgegebenen Angaben berechnen. Sind drei Seitenlängen oder zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel gegeben, lassen sich die übrigen Grössen mit dem Cosinussatz bestimmen. Ist hingegen eine Seitenlänge und der gegenüberliegende Winkel sowie eine weitere Grösse gegeben, kommt der Sinussatz zur Anwendung. Sind zwei Winkel bekannt, lässt sich der dritte offensichtlich berechnen, weil die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.

Beispiel:
Gegeben seien $\alpha = 32°$, $a = 3\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$. Konstruiert man dieses Dreieck mit Zirkel und Lineal, gibt das zwei Lösungen wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt. Das muss sich natürlich auch bei der rechnerischen Lösung der Aufgabe zeigen. Mit $\sin\gamma = \frac{c}{a}\sin\alpha = \frac{5}{3}\sin 32°$ gemäss Sinussatz gilt $\sin\gamma \approx 0.883$. Es gibt es aber zwei Winkel $\gamma_1 \approx 62°$ und $\gamma_2 \approx 180° - 62° = 118°$ mit diesem Sinuswert wegen $\sin(180° - \gamma) = \sin(\gamma)$. Für beide Werte gilt $\beta_i = 180° - \alpha - \gamma_i > 0°$ (mit $i \in \{1, 2\}$).



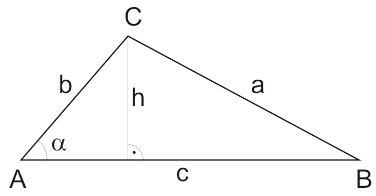
Die dritte Seitenlänge b lässt sich mit dem Sinus- oder mit dem Cosinussatz bestimmen. Es gibt offensichtlich für die beiden verschiedenen Werte von β auch zwei verschiedene Seitenlängen b.

Nicht nur die unbekannten Seitenlängen und Winkel lassen sich rechnerisch bestimmen, sondern auch der Flächeninhalt eines Dreiecks, ohne dass erst die Länge einer Höhe bestimmt werden muss. Sind zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel gegeben, so gilt

$$A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \qquad A = \frac{1}{2}ac\sin\beta \qquad A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \tag{9}$$

für den Flächeninhalt A des Dreiecks.

Auch dieser Satz lässt sich leicht beweisen. Mit $A = \frac{1}{2}hc$ für die Fläche und $h = b\sin\alpha$ für die Höhe senkrecht zur Seite c kann man h eliminieren, womit die Behauptung gezeigt ist.

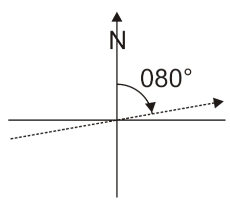


Man kann also mit Hilfe von Sinus und Cosinus in einem Dreieck mit genügend bekannten Seitenlängen und Winkeln die anderen Seitenlängen und Winkel sowie den Flächeninhalt berechnen.

2.5 Peilung

Damit ein Schiff einen Hafen anpeilen kann, muss es die Richtung, in der der Hafen liegt, in Bezug auf eine bekannte Richtung wissen. Im Folgenden wird Norden als Bezugsrichtung und die Abweichung im Uhrzeigersinn davon gemessen im Gradmass für die Peilung angenommen.

Die Richtung wird dreistellig angegeben. In der nebenstehenden Abbildung ist die Richtung 080° gestrichelt gezeigt. Norden entspricht somit 000°, Osten 090°, Süden 180° und Westen 270°.



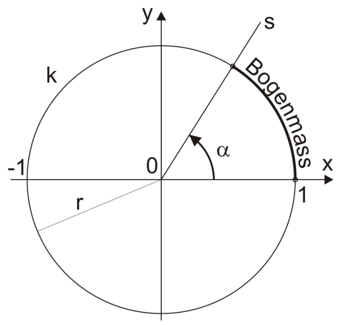
Für die Richtungen zwischen Norden (N), Osten (E), Süden (S) und Westen (W) haben sich spezielle Bezeichnungen eingebürgert. So nennt man 045° auch einfach Nordosten (NE).

Für die Peilung in der Ebene (wie etwa in der Schifffahrt) genügt also ein Winkel. Für die Peilung im Raum (wie etwa in der Luftfahrt) kommt man mit einem Zahlenwert allein nicht mehr aus.

3 Die trigonometrischen Funktionen im Bogenmass

3.1 Das Bogenmass

Neben dem Gradmass gibt es noch andere Möglichkeiten, Winkel zu messen. Eine davon ist das *Bogenmass*, das die Grösse des Winkels durch die Länge des Bogens angibt, den der Winkel auf dem Einheitskreis herausschneidet. Im Bogenmass entspricht 2π dem vollen Winkel mit $360°$ und $\frac{\pi}{2}$ einem rechten Winkel.



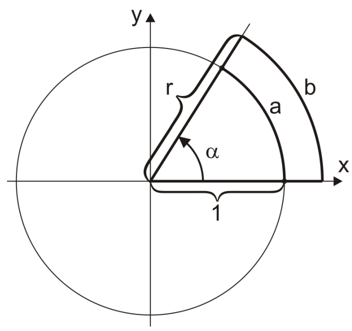
Das Bogenmass lässt sich mit

$$Bogenmass = \frac{\pi}{180°} \cdot Gradmass$$

aus dem Gradmass berechnen, und das Gradmass lässt sich mit

$$Gradmass = \frac{180°}{\pi} \cdot Bogenmass$$

aus dem Bogenmass berechnen.



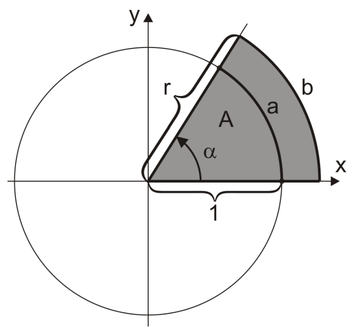
Ist a der Winkel α im Bogenmass gegeben, so ist im Kreissektor

$$b = r \cdot a$$

die Länge des Bogens b und

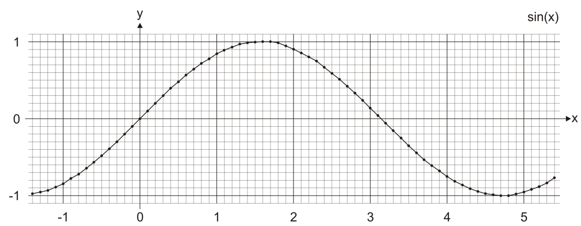
$$A = \frac{r^2 \cdot a}{2}$$

die Fläche A. Mit den obigen Formeln lassen sich diese Grössen ins Gradmass umrechnen.



3.2 Trigonometrie im Bogenmass

Schreibt man $\sin x$ statt $\sin \alpha$, so ist Sinus im Bogenmass gemeint. Will man mit einem Taschenrechner, den man vom Gradmass auf Bogenmass umschalten kann, die Sinuskurve berechnen, ergibt das etwa das, was in der nebenstehenden Abbildung gezeigt ist. Die Sinuskurve ist im Nullpunkt praktisch gerade und fällt dort mit der Winkelhalbierenden $y = x$ zusammen.



Aus dieser Tatsache folgt, dass $\sin(x) \approx x$ für kleine Werte x gilt. Weil in diesem Bereich $\cos x \approx 1$ gilt, lässt sich $\tan(x) = x$ aus der Beziehung (4) für den Tangens folgern. Man kann zudem beweisen, dass

$$\sin x < x < \tan x$$

für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt, indem man die Flächen von geeigneten Dreiecken und Kreissektoren betrachtet.

Die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen hängen nicht davon ab, ob Winkel im Grad- oder im Bogenmass gemessen werden. Es gelten somit sämtliche oben erwähnten Symmetriebeziehungen. Speziell sei aber auf die Zusammenhänge

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \tan(-x) = -\tan(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \cot(-x) = -\cot(x)$$

für die trigonometrischen Funktionen hingewiesen. Die Cosinusfunktion ist somit eine gerade Funktion, während die Sinus-, Tangens- und Cotangensfunktion ungerade Funktionen sind.

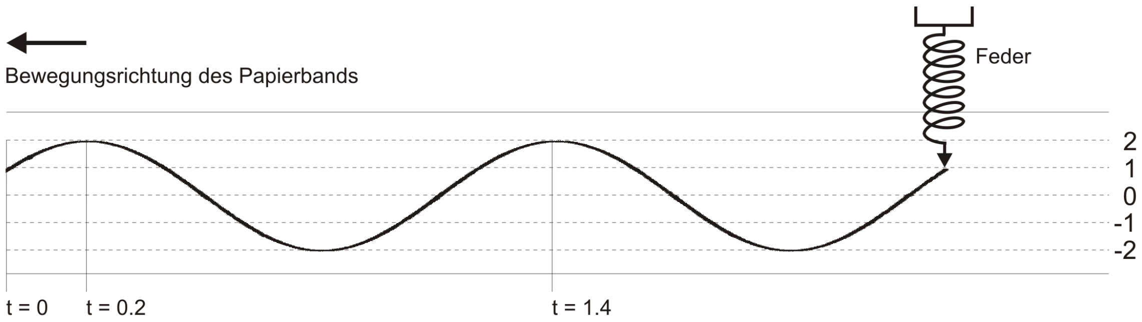
Auch die zu (3) und (5) äquivalenten Periodizitätseigenschaften gelten für die trigonometrischen Funktionen im Bogenmass. Die Periode von Sinus und Cosinus ist 2π, was $360°$ entspricht, und diejenige von Tangens und Cotangens ist π, was $180°$ entspricht.

4 Harmonische Schwingungen

4.1 Periodische Bewegungsabläufe

Periodische Vorgänge wiederholen sich nach einer gewissen Zeit, die man deren *Periode* nennt. Gewisse periodische Bewegungsabläufe lassen sich durch eine Funktion vom Typ $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + c)$ beschreiben, falls man die Abschwächung durch Reibungsverluste vernachlässigt. Sie werden *harmonische Schwingungen* genannt. Das Schwingen eines Pendels, eines an einer Feder befestigten Gewichts oder der gezupften Saite eines Musikinstruments sind Beispiele dafür.

In der unten stehenden Abbildung ist ein Beispiel für eine harmonische Schwingung gezeigt. Ein an einer Feder befestigter Schreibstift pendelt auf und ab und zeichnet seinen momentanen Ort auf einem Papierband auf, das sich mit konstanter Geschwindigkeit nach links bewegt. Die Frage ist, wie man aus diesem Papierband die Bewegungsgleichung für die schreibende Spitze der Feder bestimmen kann.



Der Parameter a ist einfach, denn er folgt unmittelbar aus den Maxima und Minima. Damit muss $a = \pm 2$ sein. Der Parameter b hängt mit der Periode 1.2 der Schwingung zusammen, und wegen $1.2 \cdot b = 2\pi$ gilt somit $b = \frac{5\pi}{3}$. Aus $f(0) = a \cdot \sin(c) = 1$ folgt $\sin(c) = 0.5$, was für $c = \frac{\pi}{6}$ gilt. Damit ist

$$f(t) = 2\sin(\frac{5\pi}{3}t + \frac{\pi}{6})$$

die Bewegungsgleichung. (Man beachte, dass die Parameter a, b und c nicht eindeutig sind, sodass verschiedene Bewegungsgleichungen dieselbe Bewegung beschreiben können, und dass es zwei Stellen pro Periode gibt mit $\sin(x) = 1$, was zu einem falschen Wert für c führen kann. Überprüfen der Gleichung für bekannte Werte wie $t = 0.2$ lohnt sich, um sicher zu stellen, dass dies die richtige Gleichung ist.)

4.2 Nullstellen und Extrema

Ist eine harmonische Schwingung als Funktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ gegeben, so stellt sich die Frage, wie man den zugehörigen Graphen möglichst genau skizzieren kann. Dazu bestimmt man sinnvollerweise erst die Nullstellen und die Extrema. Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ hat die Nullstellen bei $x = n \cdot \pi$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Somit hat $\sin(b \cdot x + c)$ die Nullstellen bei $b \cdot x + c = n \cdot \pi$ beziehungsweise, aufgelöst nach x, bei $x = \frac{n \cdot \pi - c}{b}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Maxima und Minima liegen in der Mitte zwischen zwei Nullstellen und können damit ebenfalls bestimmt werden. Hat man Maxima, Minima und Nullstellen, kann man den Graphen grob skizzieren.